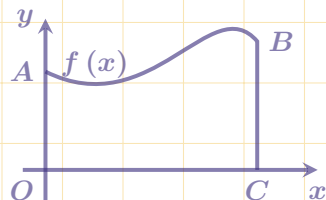


數學風

早博

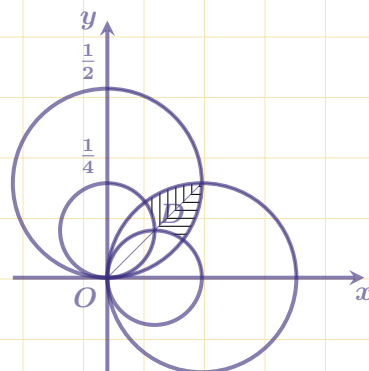
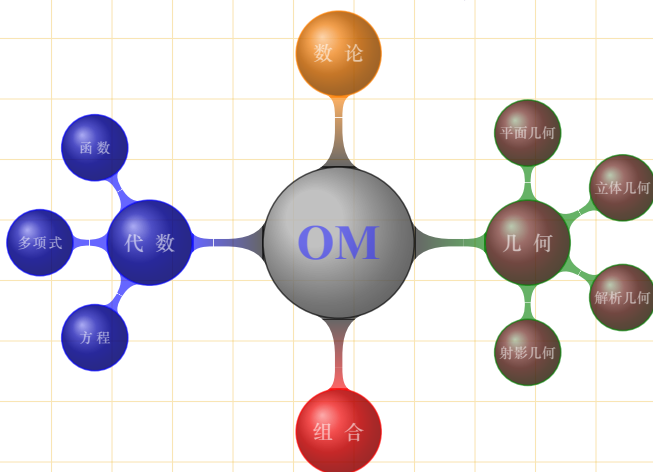
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



丘成桐少年实验班

数学专题教学指导
(2026)

曹振鹏◎编写



$$\left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

$$\nu_p(a^n - b^n) = \nu_p(a - b) + \nu_p(n)$$



图南智课分享
MATHEMATICS PROBLEM SOLVING ART
www.omaths.com

丘成桐少年实验班数学专题教学指导

费振鹏



fzp@omaths.com
2026-10

目 录

目 前 言	1
✎ 1.1 作者简介	1
✎ 1.2 内容导读	1
目 A 代数部分	3
目 算术应用	5
✎ 2.1 数字谜	5
✎ 2.2 辅助元	8
✎ 2.3 经典算术应用题	10
目 计算方法	13
✎ 3.1 计算技巧	13
✎ 3.2 定义计算	16
✎ 3.3 初探数列	18
目 代数初探	23
✎ 4.1 列代数式	23
✎ 4.2 代数式的变形	24
✎ 4.3 数轴、绝对值	25
✎ 4.4 一次方程与一次不等式	29
目 B 几何部分	33
目 长度角度面积与体积	35
✎ 5.1 长度与角度	35
✎ 5.2 面积与体积	39
目 全等三角形与特殊三角形	43
✎ 6.1 全等三角形与全等变换	43
✎ 6.2 等腰(边)三角形	49
✎ 6.3 直角三角形	53
目 几何画图与几何定最值	57
✎ 7.1 几何画图	57
✎ 7.2 几何定值	60
✎ 7.3 几何最值	62
目 C 数论部分	67
目 整除与带余除法	69
✎ 8.1 整除	69
✎ 8.2 带余除法	71
✎ 8.3 奇数与偶数	73
✎ 8.4 算术基本定理	75
✎ 8.5 质数与合数	77

✎ 8.6 公约数与公倍数	79
目 同余与同余类	83
✎ 9.1 同余与同余类	83
✎ 9.2 不定方程	86
✎ 9.3 费马小定理	87
目 进位制与高斯函数	89
✎ 10.1 进位制	89
✎ 10.2 高斯函数	92
目 D 组合部分	95
目 组合计数与组合原理	97
✎ 11.1 计数原理与排列组合	97
✎ 11.2 抽屉原理与容斥原理	100
目 游戏策略与操作变换	103
✎ 12.1 逻辑推理	103
✎ 12.2 游戏策略	104
✎ 12.3 操作变换	107
目 组合几何与组合最值	111
✎ 13.1 组合几何	111
✎ 13.2 组合最值	113
目 E 集萃部分	117
目 丘少选拔真题集萃	119
✎ 14.1 全国重点中学丘少选拔真题集萃	119
目 后 记	125
✎ 15.1 编余琐记	125
✎ 15.2 符号释义	127

前言

作者简介



费振鹏 1972 年生于江苏盐城。曾经担任沈阳市东北育才学校数学特长班、深圳市耀华实验学校华文数学班、佛山市梅沙双语学校珠峰班的中学数学竞赛专职教练。全国初、高中数学联赛优秀指导老师(教练)。培养少年数学人才成绩显著。近年来,多名学生通过数学竞赛获得保送或大学校测资格,其中初三程大拙、高一伍港荣、张海洋考取清华大学丘成桐求真书院本硕博

连读,高一林轩名考取中国科学技术大学少年创新实验班(华罗庚实验班),高三胡莫考取北京大学,高一林轩名荣获北京大学金秋营数学银牌,另有多名初、高中学生荣获全国中学生数学奥林匹克预、决赛奖牌等(指导初三白天衣获青少年数学国际城市邀请赛个人满分金牌、白天衣等团体金牌,另有百余名学生获全国初高中数学联赛一等奖,白天衣、梁宇辰等学生获 CMO 金牌并进入 IMO 国家集训队等)。在国家核心期刊《数学通报》、《数学教学》、《中等数学》、《中学数学教学参考》、《中学数学研究》、《中学数学月刊》等发表数学竞赛教学论文几十篇,主编《初中综合数学》(辽宁教育出版社)、《学数学》(高中数学竞赛与大学自主招生专辑第 1~6 卷,中国科学技术大学出版社)等,指导胡莫等多名学生在中学数学期刊上发表数学解题研究文章。

内容导读

——直击核心,构建数学思维的进阶之路

《丘成桐少年实验班数学专题教学指导》自 2024 年出版以来,承蒙广大师生、竞赛教练与家长的厚爱,成为许多学子案头常备的实战指南。过去两年里,我收到了大量来自一线的反饋,有人在这本书的帮助下理清了知识脉络,也有人提出了许多中肯的修订建议。这些声音促使我着手对本书进行全面的改版与重新排版。2026 版不仅是版式的更新,更是内容的精进——我希望它不仅“好用”,更能精准对接当前顶尖数学人才的选拔与培养需求。

一、关于作者与本书的缘起

作为长期深耕于中学数学竞赛与拔尖人才培养的一线教练,我曾先后在沈阳市东北育才学校、深圳市耀华实验学校、佛山市梅沙双语学校等知名学府担任数学特长班专职教练。多年来,看着程大拙、伍港荣、林轩名等一批批少年通过数学竞赛考入清华大学丘成桐求真书院、中科大少年创新实验班等顶尖学府,是我教学生涯中最欣慰的时刻。

在多年的教学与教研中,我深切地感受到:要想在顶尖选拔中脱颖而出,仅靠“刷题”是远远不够的。孩子们真正需要的是一套结构清晰、能打通初等与高等数学壁垒的专题化训练。正是基于我在核心期刊发表的数十篇教研论文,以及主编《初中综合数学》《学数学》等教辅书的经验,我将多年的讲义精华与实战心得,凝练成了这本《丘成桐少年实验班数学专题教学指导》。

二、全景导航:本书的内容架构与导读

本书不是知识点的简单罗列,而是按照数学的核心分支,精心搭建了代数、几何、数论、组

合四大板块,并辅以真题集萃,带领学生进行系统性的思维跃迁.

A 代数部分 (第 2-4 章):从基础的“数字谜”、“辅助元”到“定义计算”、“数列初探”,本书不仅教你算,更教你“巧妙”地算.在“代数初探”中,我们对代数式的变形、绝对值与不等式的探讨,旨在帮助学生完成从算术思维向抽象代数思维的跨越.

B 几何部分 (第 5-7 章):这是培养几何直观与严密逻辑的重镇.除了常规的长度、角度与全等三角形,本书特意单列了“几何画图与几何定最值”.“几何定值”与“几何最值”是近年丘班及各类选拔中的高频考点,书中提炼的模型与方法,能极大提升学生处理复杂图形问题的能力.

C 数论部分 (第 8-10 章):从“整除与带余除法”到“同余与同余类”,再到高阶的“费马小定理”、“进位制与高斯函数”.数论是离散数学的皇冠,也是少年班选拔最看重的逻辑试金石.本书的数论部分循序渐进,直击数论问题的本质.

D 组合部分 (第 11-13 章):涵盖了“计数原理”、“抽屉与容斥原理”、“逻辑推理”、“游戏策略与操作变换”以及“组合最值”.这一部分极其锻炼思维的灵活度,是培养数学直觉和应变能力的绝佳试验田.

E 集萃部分 (第 14 章):第 14 章“全国重点中学丘少选拔真题集萃”是本次改版的重头戏.我将历年极具代表性的真实选拔试题收录于此,让同学们在系统学习后,能直接触摸实战的温度.此外,附录中的“符号释义”也进一步规范了书写与表达.

三、2026 版改版亮点与使用建议

为了适应新时代的学习习惯,2026 版在保留原汁原味干货的基础上,做出了如下优化:

版式重构:重新设计了版式、公式排版与图形呈现,适当增加留白,让阅读不再拥挤,便于同学们在书页上随时写下自己的推导与批注.

层次化打磨:例题的解析更加注重“一题多解”与“多题一解”;习题的编排更强调“基础巩固—拓展探究—挑战极限”的梯度,满足不同学力读者的需求.

使用建议:

对于备考者:建议按“板块”集中突破.对于真题集萃(第 14 章),请务必先“闭卷”模拟,再对照解答.做错的题,不妨回到前面的专题去寻找对应的知识点和思想方法,进行二次消化.

对于教练与教师:本书目录的专题划分非常适合作为校本课程的骨架.您可以打破章节顺序,提取书中的例题作为课堂探究的素材,引导学生进行“变式训练”与“说题”.

对于家长:数学拔尖人才的形成需要“慢功夫”.请允许孩子在“几何定值”或“操作变换”等难题上长时间思考.关注的重点不应是进度,而是孩子是否能在错误中反思,是否能清晰地表达出思考的逻辑.

数学的世界,探索与挑战永无止境.感谢为本次改版付出心血的编辑和设计团队,也感谢所有提出批评与建议的同行与读者.愿这本新版的小书,能成为少年们通往数学殿堂的坚实阶梯.

费培鹏

2026 年 10 月于深圳福田

代数部分



算术应用

导言

本章主要讲解数字谜、辅助元、经典算术应用题.

数字谜

知识概要

概要 2.1.1

数字谜问题, 包含数独、数字填空、数字推理、字母数字谜等问题. 主要培养的核心能力: 逻辑推理能力 (如数字能不能重复、等式必须成立、行列宫的规则等), 批判性思维与问题解决能力 (分析能力、策略性思考、试错与验证), 专注力与耐心 (持续的深度思考、排除干扰、注意力集中, 不轻言放弃的耐心和毅力), 模式识别能力 (问题依赖于寻找数字、位置或形状之间的隐藏规律或模式), 数字敏感度与计算能力 (如奇偶性、质数、倍数关系等, 提升心算速度和准确性), 工作记忆能力 (如暂记住多种可能性、已排除的数字和尚未解决的区域, 即“脑中的草稿纸”).

总之, 接触和解决数字谜问题, 是以一种有趣且富有挑战性的方式, 系统地锻炼我们大脑的“肌肉”. 这些能力不仅对数学学习有直接帮助, 更是应对学业、职业乃至日常生活中各种复杂问题的通用基础能力.

探究研讨

例题 2.1.1

算式: $\text{大} \times \text{家} \times \text{学数学} = 2020$ 中, 不同的汉字代表不同的数字, 相同的汉字代表相同的数字, 则 $\text{大} + \text{家} + \text{学数学}$ 的最大值是 _____.

例题 2.1.2

在图 2.1.1 的 4×4 中, 每个空格内填入 1 个或 2 个数, 使得每行、每列出现数字 1 ~ 6 各一次, 每个格内左上角的数表示格内所有数的和. 如果一个格填两个数, 小数要写在大数左边 (左图是一个正确的例子). 那么, 将右图空格填好后, 最后一行前三个格内按从左到右的顺序组成的多位数是 _____.

1 1	2 2	7 34	11 56
7 25	7 34	6 6	1 1
3 3	7 16	5 5	6 24
10 46	5 5	3 12	3 3

3	5	7	6
6	4	2	9
7	6	5	3
5	6	7	3

图 2.1.1

例题 2.1.3

如图 2.1.2, 在空格内填入数字 1~9, 使得每行九个数字不重复, 每列三个数字不重复, 且三个数字的和写在了每列的最上方方格里, 表格中的黑点表示两边的数字成两倍关系, 白点表示两边的数字差为 1 (没有标记黑点或白点的格子就不存在这样的关系). 那么, 从右边数第二列从上到下组成的三位数是 _____.

20	9	14	14	17	20	19	12	10
	○	○	○		○	○		○
○		●	○	○	○			
		●	●	●	○	○		
			○		○			●

图 2.1.2

例题 2.1.4

将 1~10 这十个自然数填入图 2.1.3 五边形的十个圆圈内, 使得每条边上的三个圆圈内的三个数之和都等于 a , 则 a 的最小值是 _____.

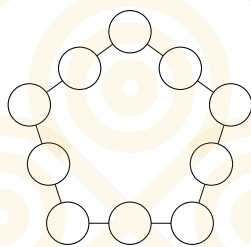


图 2.1.3



学以致用

习题 2.1.1

如图 2.1.4, 这个加法算式刚好由 0~9 这 10 个数字各 1 个组成, 其中 2、0、1、8 已经填好. 那么, 将这个加法算式补充完整后, “数园探秘”所代表的四位数是 _____.

$$\begin{array}{r}
 2 \text{ 数 学 } 8 \\
 + \quad \quad \text{花 园} \\
 \hline
 \text{探 } 0 \text{ 1 秘}
 \end{array}$$

图 2.1.4

习题 2.1.2

下面两个算式中, 不同汉字代表不同的非零数字, 相同汉字代表相同数字.

$$\text{数} \times \text{学} = \overline{\text{花 园}}$$

$$\text{数} + \text{学} = \overline{\text{探 秘}}$$

那么, “花园探秘”代表的四位数是 _____.

习题 2.1.3

在图 2.1.5 的加法算式中, 相同的汉字表示相同的数字, 不同的汉字表示不同的数字, 其中梨 < 花 < 开 < 千 < 万 < 树, 那么“万树梨花开”组成的五位数是 _____.

千 树

+

万 树

梨 花 开

图 2.1.5



辅助元

知识概要

概要 2.2.1

有一类未知量较多, 情形较复杂的问题, 我们可以根据需求设出可能多于方程的未知数, 有时还会用到不等式. 首先根据题意列出方程 (或不等式) 的不定方程组 (或混合组), 并分清主元与辅助元, 求解时要充分利用方程与不等式之间的联系, 再由辅助元的桥梁作用求出主元. 辅助元法是应用题常用解题方法的补充.

引入和使用辅助元, 主要培养抽象化与建模能力、系统化思考能力、化繁为简的转化能力、严谨的逻辑与代数推理能力、高阶的批判性思维与策略规划等.

总之, 学习和使用“辅助元”的策略, 培养的是一种更高阶的、系统性的数学和工程思维能力, 它让你从“解题者”向“建模者和分析者”迈进.

探究研讨

例题 2.2.1

雅典图书馆的大厅里存放着一套由 10 块独立沙发组成的“组合式沙发凳”. 一次旅游, 聪明的小鱼看到这套“组合式沙发凳”后, 觉得很漂亮, 于是把这 10 块沙发所组成的图形画了下来 (如图 2.2.1). 其中 4、5、6、8 号都是等边三角形, 边长都是 2 厘米; 1、4、5、8、10 号, 2、5、6、8、9 号和 3、4、5、6、7 号所组成的 3 个长方形完全一样, 长都是 6 厘米. 小鱼想把这个图形沿线剪成 10 块纸片, 并将这 10 块纸片无重叠地拼成一个大长方形; 如果拼好后的大长方形的宽与原来 1 个长方形的宽相等, 那么, 拼好后的大长方形的长是 _____ 厘米 (纸片可翻转).

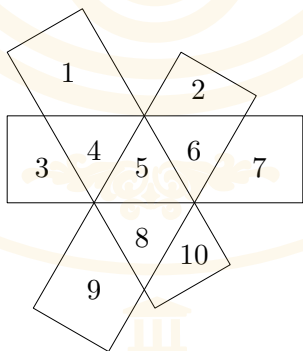


图 2.2.1

例题 2.2.2

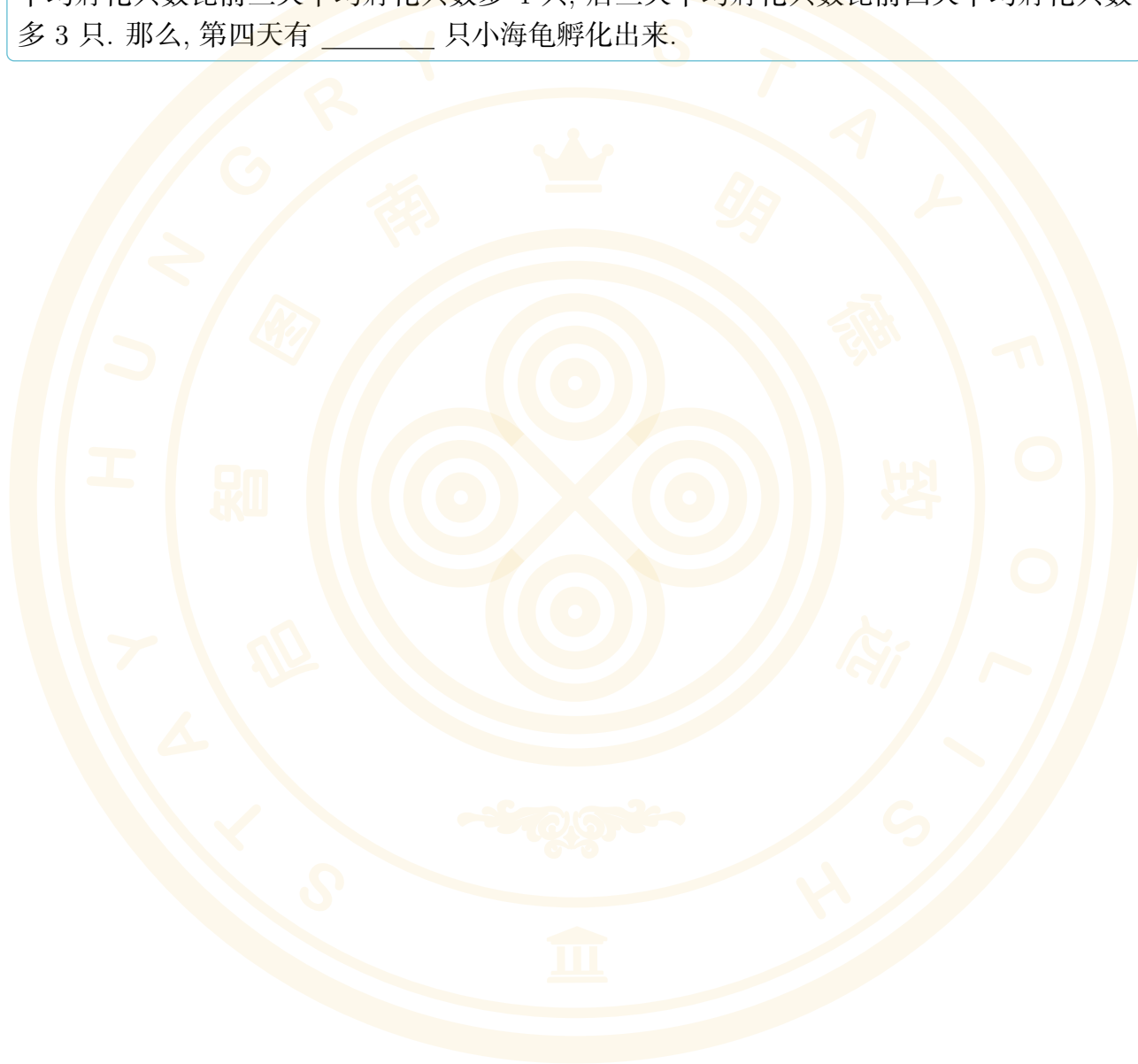
某一年, 精英一班孩子的年龄之和与精英二班孩子的年龄之和恰好相等; 过了一年, 精英一班新报名了一个孩子, 使一班的年龄和比二班的年龄和大 6 岁; 又过了一年, 这个孩子调到了精英二班, 使二班的年龄和比一班的年龄和大 16 岁. 那么两个班原来相差 _____ 人.

**习题 2.2.1**

聪聪参加了 7 门满分都是 100 分的考试, 之后成绩一个一个地公布, 每公布一门成绩, 他的“已公布成绩的考试的平均分”都提高 1 分, 则第一个公布的成绩和最后一个公布的成绩差 _____ 分.

习题 2.2.2

海滩上有一些海龟蛋, 科学家统计后发现, 某一周共孵化出 100 只小海龟, 并且后四天平均孵化只数比前三天平均孵化只数多 4 只; 后三天平均孵化只数比前四天平均孵化只数多 3 只. 那么, 第四天有 _____ 只小海龟孵化出来.



经典算术应用题

知识概要

概要 2.3.1

经典的小学算术应用题 (比如“鸡兔同笼”、“水池进水排水”、“相遇追及”问题等) 是数学教育中不可或缺的一环, 它们培养的能力非常综合, 远超单纯的计算。

这类算术应用题, 所培养的能力: 数学核心能力 (数学建模能力、逻辑推理与分析能力、数量关系理解与运用能力), 通用思维与综合能力 (阅读理解能力、抽象思维能力、问题分解与解决策略、批判性思维与验证习惯、耐心和专注力)。

总之, 经典的小学算术应用题是一个强大的思维训练工具. 它巧妙地将数学知识、逻辑推理和生活情境结合在一起, 培养的是一套面向未来的、可迁移的解决问题的综合能力, 其价值远高于机械的计算练习。

探究研讨

例题 2.3.1

甲、乙、丙 3 人现在岁数的和是 113 岁. 当甲的岁数是乙的一半时, 丙是 38 岁; 当丙的岁数是乙的 2 倍时, 甲是 17 岁. 则乙现在 _____ 岁.

例题 2.3.2

某工厂的时钟比标准钟慢, 这只时钟按标准时间每 76 分钟分针与时针重合一次. 工厂规定: 每天 8 小时内每小时工资为 20 元, 8 小时外每小时工资为 8 小时内工资的 2.5 倍. 那么, 小陈按工厂的时钟一天工作 9 小时, 他少得了 _____ 元钱.

例题 2.3.3

某大型商场的自动扶梯以均匀的速度由下向上运行着. 在一次消防演练中, 甲、乙两位消防员分别同时从这部自动扶梯的两端下楼、上楼. 甲每分钟走 120 级, 乙每分钟走 90 级, 结果乙花 28 秒到达楼上, 甲却花了 70 秒才到楼下. 则甲、乙两人经过 _____ 秒的时候相遇.

例题 2.3.4

P 市举办了 A、B 两场音乐会. 某音乐学院弦乐系有 37 名学生听了音乐会 A, 23 名学生听了音乐会 B. 若听了两场的学生与只听了一场的学生一样多, 那么, 其中这两场音乐会都听了的学生有 _____ 名.

例题 2.3.5

一条微信朋友圈最多可以发 9 张图. 健健想把自己为班级集体活动准备的 21 件礼品全部发朋友圈展示, 但礼品过多, 所以他把礼品分为两类, “特别礼品”1 件礼品照 1 张照片, “普通礼品”3 件 1 组照 1 张照片. 结果发现: “普通礼品”恰好 3 件 1 组没有剩余, 总共也恰好需要 9 张照片. 那么, “特别礼品”共有 _____ 件.

例题 2.3.6

甲、乙两机器人正在模拟攻击战, 其中甲机器人不能移动, 但佩有玩具手枪, 可每 8 秒发一发子弹, 子弹的速度是每秒 30 米; 乙机器人只佩有盔甲, 只在接触到对方时才能攻击,

其奔跑的速度是每秒 10 米.

- (1) 若乙机器人准备逃跑, 背向甲机器人走, 它每隔 _____ 秒就会被子弹击中一次.
- (2) 若乙机器人准备攻击, 迎着甲机器人走, 它每隔 _____ 秒就会被子弹击中一次.
- (3) 当乙机器人出现在甲机器人的射程内时, 甲机器人就会开枪攻击. 已知 7 发子弹可以使乙机器人瘫痪, 那么子弹射程大于 _____ 米, 就可以保证甲机器人不受攻击.



习题 2.3.1

有一个数加上 20 后, 变成自己的 3 倍, 再增加 _____ 后, 变成自己原来的 6 倍.

习题 2.3.2

在电影《盗梦空间》中, 主角柯布曾经进入过三层梦境. 梦境中时间过的比现实快, 现实中每经过 1 分钟, 第一层梦境会经过 2 分钟, 第二层梦境会经过 20 分钟, 第三层梦境会经过 200 分钟. 一次试验中, 柯布在第三层梦境中经历的时间是第一层梦境的 100 倍, 是第二层梦境的 9 倍, 并且三层梦境一共经历了 2018 分钟, 那么, 现实世界中过了 _____ 分钟.

习题 2.3.3

根据相对论, 接近光速飞行的宇宙飞船上, 时间会变慢. 弟弟乘坐飞船出发时, 弟弟 24 岁, 哥哥 30 岁; 当弟弟返回地球时, 哥哥的年龄是弟弟的 3 倍. 如果飞船上的 1 年相当于地球上的 10 年, 那么哥哥现在 _____ 岁.

习题 2.3.4

为了响应“传统文化进校园”的号召, 学校计划将百家姓的姓氏做成小印章发给同学. 百家姓由“单姓”和“复姓”组成, 单姓印章每个成本 2 元, 复姓印章每个成本 3 元. 已知在百家姓中, 单姓比复姓的 3 倍多 72 个; 一套完整的百家姓, 成本需 1260 元. 那么, 百家姓中, 共有姓氏 _____ 个.

计算方法

导言

本章主要讲解计算技巧、定义计算和初探数列.

计算技巧

知识概要

概要 3.1.1 (计算技巧)

运算定律、凑整巧算、趋同求异、整体换元、倒序相加、分组求和、错位相减、裂项相消、累加累乘等等.

探究研讨

例题 3.1.1 (凑整巧算)

计算: $11 + 192 + 1993 + 19994 + 199995$.

例题 3.1.2

$$\text{计算 } \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} + \frac{1}{2025}}{\frac{1}{1+2025} + \frac{1}{2+2026} + \frac{1}{3+2027} + \cdots + \frac{1}{1012+3036} + \frac{1}{1013+3037}}.$$

例题 3.1.3 (裂项法)

$$\text{计算: } 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+100}.$$

例题 3.1.4

$$\text{设 } s = \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 5} + \frac{2^3}{5 \times 7} + \cdots + \frac{2^{49}}{97 \times 99}, t = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2^2}{7} + \cdots + \frac{2^{48}}{99}, \text{ 则 } s - t = \underline{\hspace{2cm}}.$$

例题 3.1.5 (整体换元)

$$\text{计算 } \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2005} \right) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2004} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2005} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2004} \right).$$

例题 3.1.6 (等比数列求和)

$$\text{计算: } 2 - 2^2 + 2^3 - 2^4 + 2^5 - 2^6 + \cdots + 2^9 - 2^{10} + 2^{11}.$$

例题 3.1.7

$$\text{计算: } 512 \times 1 + 256 \times 2 + 128 \times 3 + 64 \times 4 + 32 \times 5 + 16 \times 6 + 8 \times 7 + 4 \times 8 + 2 \times 9 + 1 \times 10 = \underline{\hspace{2cm}}.$$

例题 3.1.8

十个互不相等的有理数, 每九个的和都是“分母为 22 的既约真分数 (分子与分母无公约数的真分数)”, 则这十个有理数的和是 ().

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{11}{18}$

(C) $\frac{7}{6}$

(D) $\frac{5}{9}$

例题 3.1.9

一列数 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 满足对于任意正整数 n , 都有

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n^3,$$

则 $\frac{1}{a_2 - 1} + \frac{1}{a_3 - 1} + \dots + \frac{1}{a_{100} - 1} = \underline{\hspace{2cm}}.$

例题 3.1.10

已知

$$A = \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{99}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \dots + \frac{1}{2} + 1\right)^2,$$

$$B = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100},$$

则 $A + B = \underline{\hspace{2cm}}.$

**习题 3.1.1**

$$\frac{6 \times 30^{2024} + 30^{2025}}{30^{2024} - 10 \times 30^{2023}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

习题 3.1.2

计算: $19 + 199 + 1999 + \dots + \underbrace{199 \dots 99}_{1999 \text{ 个 } 9} + 1999 = \underline{\hspace{2cm}}.$

习题 3.1.3

计算: $\frac{1}{1 \times 4} + \frac{1}{4 \times 7} + \frac{1}{7 \times 10} + \dots + \frac{1}{97 \times 100} = \underline{\hspace{2cm}}.$

习题 3.1.4

计算:

(1) $5 + 10 + 15 + \dots + 100 = \underline{\hspace{2cm}};$

(2) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \underline{\hspace{2cm}};$

(3) $\frac{1}{2003} + \frac{2}{2003} + \frac{3}{2003} + \dots + \frac{4005}{2003} = \underline{\hspace{2cm}};$

(4) $\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{50} + \frac{2}{50} + \dots + \frac{49}{50}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

习题 3.1.5

计算: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{1024} = \underline{\hspace{2cm}}.$

习题 3.1.6

分母为 24, 分数值大于 0 小于 8 的所有既约分数 (即最简分数) 的和为 _____.



定义计算

知识概要

概要 3.2.1 (定义计算)

新运算有着广泛的应用. 例如, 在计算机科学、密码学、经济学等领域, 新运算被用来解决一些复杂数学问题. 通过新运算, 我们可以更方便地解决实际问题, 提高解决问题的效率.

1. 理解定义

充分理解新运算的规则、顺序、性质与特征.

2. 赋值代入

运用特殊值, 寻求新运算的规律.

3. 化归常规

将新运算转化为常规运算的计算过程, 总结出一般求解步骤或计算公式.

4. 检验结果

将所求算式, 代入一一检验, 确保满足题中每一个条件.

新运算是一种具有挑战性的数学概念, 只要掌握了解题的诀窍, 新运算题目就不难解决.

探究研讨

例题 3.2.1

对于任意实数 x, y , 定义运算符号 $\otimes$, 且 $x \otimes y$ 有唯一解, 满足

$$(a \otimes b) + c = (a \otimes c) + (b \otimes c),$$

$$0 \otimes (a + b) = (0 \otimes a) + (0 \otimes b),$$

则 $20 \otimes 24 = \underline{\hspace{2cm}}$.

例题 3.2.2

对任意两个整数 x, y , 有一个确定的整数 $x \triangle y$, 并且有以下性质:

(i) 对任意整数 x , 有

$$x \triangle 0 = 1;$$

(ii) 对任意整数 x, y, z , 有

$$(x \triangle y) \triangle z = (z \triangle xy) + z.$$

这里乘积 xy 作为一个整体.

完成下列各题:

(1) 求证: 对任意整数 x , $1 \triangle x = x + 1$;

(2) 求证: 对任意整数 x , $x \triangle 1 = x + 1$;

(3) 求 $20 \triangle 25$.



习题 3.2.1

定义一种整数集合上的新运算: 取模运算, 用符号“%”表示, 读作模. 它的意思是取一个数除以另一个数的余数. 例如: $25\%7$, 读作二十五模七, 意思是取 25 除以 7 的余数, 我们知道 $25 \div 7 = 3 \cdots \cdots 4$, 因此 $25\%7 = 4$. 再例如: $45\%7$, 读作四十五模七, 意思是取 45 除以 7 的余数, 我们知道, $45 \div 7 = 6 \cdots \cdots 3$, 因此 $45\%7 = 3$.

(1) 计算: $5841\%127 = \underline{\hspace{2cm}}$.

定义一个神奇的函数 $f(x) = x\%k$, 它相当于一个神奇的“中间商”, 你给它一个数, 它就会返回给你另一个与之对应的数——你所给的数对于给定的正整数 k 的模数, 并把它作为 $f(x)$ 的值. 例如: 给定一个整数 $k = 7$, $f(25) = 4$, $f(45) = 3$. 这个“中间商”, 我们就将它叫做哈希函数.

(2) 对于正整数 $k = 7$, 计算哈希函数 $f(66) = \underline{\hspace{2cm}}$.

习题 3.2.2

已知 a, b 为两个不相等的自然数, 其中 $a \triangle b$ 表示 a 与 b 的最大公约数和最小公倍数的和, 现有 $6 \triangle x = 44$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

习题 3.2.3

给定正整数 x 和 y , 我们定义一个新运算: $x \oplus y$. 已知 $1 \oplus 1 = 1$, 且对所有整数 x, y, z 有 $(x \oplus y) + z = (y \oplus z) + x$. 则 $20 \oplus 25 = \underline{\hspace{2cm}}$.

习题 3.2.4

对每个正数 x , 定义 $\{x\}$ 是 x 与 $\frac{1}{x}$ 中的较大数. 则满足 $5y\{8y\}\{25y\} = 1$ 的所有正数 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

习题 3.2.5

设 $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$, 其中 x_1, x_2, x_3, x_4 都是实数.

定义一种新运算 $\otimes$ 如下: 对任意实数 a, b , 都有 $X \otimes (a, b) = (ax_1 + bx_2, ax_3 + bx_4)$.

已知 $X \otimes (1, 0) = (0, 2024)$, $X \otimes (0, 2024) = (m, n)$, $X \otimes (m, n) = (1, 0)$.

则 $m = \underline{\hspace{2cm}}$, $n = \underline{\hspace{2cm}}$.

 初探数列

 知识概要

概要 3.3.1 (数列)

1. 数列的定义

- (1) 按照确定的顺序排列的一列数称为**数列**. 数列中的每一个数叫做这个数列的**项**.
 (2) 数列的第一个位置上的数叫做这个数列的第 1 项 (或**首项**), 常用符号 a_1 表示, 第二个位置上的数叫做这个数列的第 2 项, 用 a_2 表示, $\cdots$, 第 n 个位置上的数叫做这个数列的第 n 项, 用 a_n 表示. 数列的一般形式是

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

简记为 $\{a_n\}$.

- (3) 项数有限的数列叫做**有穷数列**, 项数无限的数列叫做**无穷数列**.

2. 数列的公式

- (1) 如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与它的序号 n 之间可以用一个式子来表示, 那么这个式子叫做这个数列的**通项公式**.
 (2) 如果一个数列的相邻两项或多项之间的关系可以用一个式子来表示, 那么这个式子叫做这个数列的**递推公式**. 知道了首项或前几项, 以及递推公式, 就能求出数列的每一项了.
 (3) 把数列 $\{a_n\}$ 从第 1 项起到第 n 项止的各项之和, 称为这个数列的**前 n 项的和**, 记作 S_n , 即

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

显然 $S_1 = a_1$, 而 $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ ($n \geq 2$), 于是有

$$a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1, \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2. \end{cases}$$

- (4) **累加法**: 数列 $\{a_n\}$ 通项公式:

$$a_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}).$$

- (5) **累乘法**: 数列 $\{a_n\}$ 通项公式:

$$a_n = a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \cdots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

概要 3.3.2 (等差数列)

1. 等差数列的定义

- (1) 如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它的前一项的差都等于同一个常数, 那么这个数列叫做**等差数列**, 这个常数叫做等差数列的**公差**, 公差通常用字母 d 表示.
 (2) 由三个数 a, A, b 组成的等差数列可以看成是最简单的等差数列. 这时, A 叫做 a 与 b 的**等差中项**. 此时 $2A = a + b$.

2. 等差数列的公式

(1) 递推公式: 等差数列 $\{a_n\}$ 的递推公式为

$$a_{n+1} - a_n = d.$$

(2) 通项公式: 首项为 a_1 , 公差为 d 的等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

(3) 前 n 项和公式: 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}, \quad \text{即 } S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d.$$

概要 3.3.3 (等比数列)

1. 等比数列的定义

(1) 如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它的前一项的比都等于同一个常数, 那么这个数列叫做等比数列, 这个常数叫做等比数列的公比, 公比通常用字母 q 表示 (显然 $q \neq 0$).

(2) 在 a, b 中间插入一个数 G , 使 a, G, b 成等比数列, 那么 G 叫做 a 与 b 的等比中项. 此时 $G^2 = ab$.

2. 等比数列的公式

(1) 递推公式: 等比数列 $\{a_n\}$ 的递推公式为

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

(2) 通项公式: 首项为 a_1 , 公比为 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

(3) 前 n 项和公式: 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式为

$$S_n = \begin{cases} na_1, & q = 1, \\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, & \text{即 } \frac{a_1 - a_n q}{1-q}, \quad q \neq 1. \end{cases}$$



例题 3.3.1

写出下面数列的一个通项公式, 使它的前 5 项分别是下列各数:

$$(1) \frac{2^2-1}{2}, \frac{4^2-2}{6}, \frac{6^2-3}{24}, \frac{8^2-4}{120}, \frac{10^2-5}{720}; \quad (2) \frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, -\frac{1}{20}, \frac{1}{30};$$

$$(3) -\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, \frac{8}{17}, -\frac{8}{13}; \quad (4) 1, 0, 1, 0, 1.$$

例题 3.3.2

根据下列递推公式写出数列的通项公式:

$$(1) a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + (4n + 4) \quad (n \text{ 是正整数});$$

$$(2) a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2} \quad (n \text{ 是正整数}).$$

例题 3.3.3

已知下面各数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的公式, 求数列的通项公式.

- (1) $S_n = 2n^2 - 3n$; (2) $S_n = n^2 + 1$; (3) $S_n = 2^n + 3$; (4) $S_n = (-1)^{n+1} \cdot n$.

例题 3.3.4

- (1) 3, 4, 6, 12, 36, ().

(A) 72 (B) 108 (C) 216 (D) 288

- (2) $\frac{5}{6}, \frac{6}{11}, \frac{11}{17}, (), \frac{28}{45}$.

(A) $\frac{17}{24}$ (B) $\frac{17}{28}$ (C) $\frac{28}{17}$ (D) $\frac{24}{17}$

- (3) 1, 1, 5, 7, 13, ().

(A) 15 (B) 17 (C) 19 (D) 21

- (4) -8, 15, 39, 65, 94, 128, 170, ().

(A) 180 (B) 210 (C) 225 (D) 256

例题 3.3.5

把图 3.3.1 中的框图所输出的数 A 按先后顺序组成一个数列 $\{x_n\}$, 请解答下列问题:

- (1) 若输入 $A = \frac{49}{65}$, 请写出数列 $\{x_n\}$ 的所有项;

- (2) 若输出的无穷数列 $\{x_n\}$ 是一个常数列, 试求输入的初始值 A 的值.

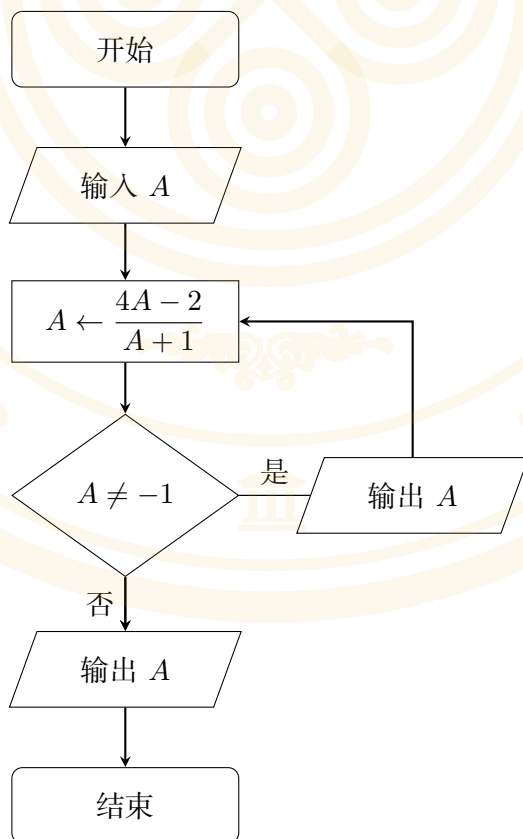


图 3.3.1

例题 3.3.6

一个楼梯有足够多的台阶, 规定每次可上 1 级、2 级或 3 级, 设从地面上到第 n 级台阶的方法数为 a_n 种.

- (1) 求从地面上到第 8 级台阶的方法数;
- (2) 若规定上台阶时不准上到第 5 级, 求从地面上到第 8 级台阶的方法数.

**习题 3.3.1**

- (1) 125, 2, 25, 10, 5, 50, (), ().
 (A) 10, 250 (B) 1, 250 (C) 1, 500 (D) 10, 500
- (2) 15, 28, 54, (), 210.
 (A) 78 (B) 106 (C) 165 (D) 171
- (3) 3, 4, 8, 24, 88, ().
 (A) 121 (B) 196 (C) 225 (D) 344

习题 3.3.2

图 3.3.2 中的一系列三角形图案称为谢尔宾斯基三角形.

- (1) 在图中 4 个大三角形中, 着色的三角形的个数依次构成数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项, 写出这个数列的一个通项公式;
- (2) 在图中 4 个大三角形中, 设子图 (1) 着色面积为 1, 大三角形的着色面积依次构成数列 $\{b_n\}$ 的前 4 项, 写出这个数列的一个通项公式.

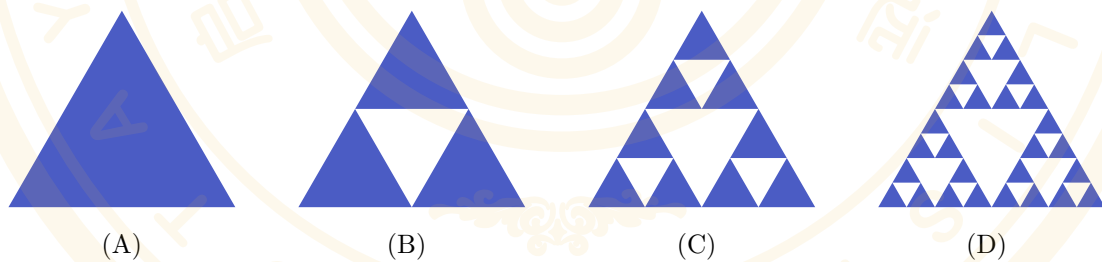


图 3.3.2

习题 3.3.3

写出下面数列的一个通项公式:

- (1) 90, 70, 40, 0, -50, ...;
- (2) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{15}, \frac{1}{24}, -\frac{1}{35}, \dots$;
- (3) $\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}, 8, \frac{25}{2}, \dots$;
- (4) 7, 77, 777, 7777, 77777, ...;
- (5) $1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \dots$.

习题 3.3.4

数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, 对所有的 $n \geq 2$, 都有 $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n = n^2$.

- (1) 求 $a_3 + a_5$;
- (2) $\frac{256}{225}$ 是此数列中的项吗?

习题 3.3.5

我们将整数的平方称为完全平方数, 如 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, $\cdots$

删去正整数数列 1, 2, 3, $\cdots$ 中的所有完全平方数, 得到一个新数列. 此数列第 2025 项是 _____.

习题 3.3.6

如图 3.3.3, 有一列曲线 $P_0, P_1, P_2, \cdots$, 已知 P_0 所围成的图形是面积为 1 的等边三角形, P_{k+1} 是对 P_k 进行如下操作得到: 将 P_k 的每条边三等分, 以每边中间部分的线段为边, 向外作等边三角形, 再将中间部分的线段去掉 ($k = 0, 1, 2, \cdots$). 记 S_n 为曲线 P_n 所围成图形的面积. 则数列 $\{S_n\}$ 的通项公式为 _____.

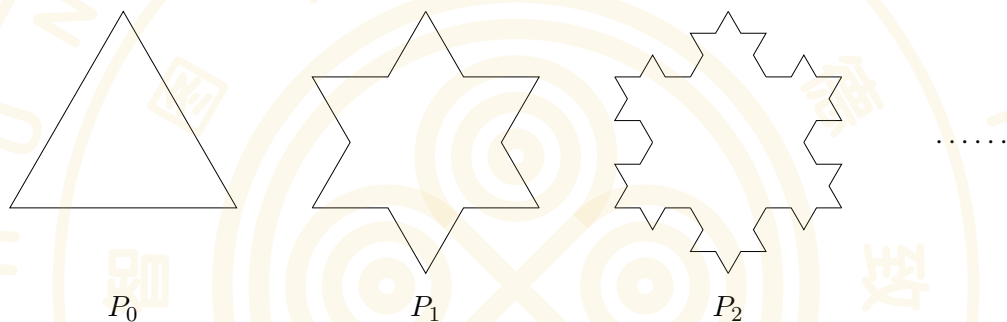


图 3.3.3

代数初探

引言
 本章主要讲解列代数式、代数式的变形、数轴、绝对值、一次方程与一次不等式。

列代数式
 知识概要

概要 4.1.1
 列代数式是将问题中与数量有关的词语用含有数字、字母和运算符号的式子表示出来的数学方法.
 语言转化：将自然语言描述的数量关系转化为符号语言.
 运算顺序：需遵循数学运算优先级，必要时使用括号明确顺序.
 词义辨析：需严格区分易混淆术语，如“除”与“除以”、“平方差”与“差的平方”.
 书写规范：乘号省略规则是字母间或数字与字母间可省略，但数字间需保留；除法写成分数形式，带分数需化为假分数.
 单位处理：若代数式带单位，需根据情况加括号.

探究研讨

例题 4.1.1
 某工程，甲队单独做所需天数是乙与丙两队合做所需天数的 a 倍，乙队独做所需天数是甲与丙两队合做所需天数的 b 倍，丙队独做所需天数是甲与乙两队合做所需天数的 c 倍，则 $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} =$ _____.

学以致用

习题 4.1.1
 若 a 个同学在 b 小时内共搬砖 c 块，则 c 个同学以同样速度搬运 a 块需 _____ 小时.

代数式的变形

知识概要

概要 4.2.1 (配方法)

配方法是指将一个式子 (包括代数式有理式、无理式和超越式) 或一个式子的某一部分通过恒等变形化为完全平方式或几个完全平方式的和. 这种方法常常被用到恒等变形中, 以挖掘题目中的隐含条件, 是解题的有力手段之一.

例如:

$$\begin{aligned} a^2 \pm 2ab + b^2 &= (a \pm b)^2, \\ a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca &= (a + b + c)^2, \\ &\dots \end{aligned}$$

特别地, 对于二次三项式

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}. \end{aligned}$$

即

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

探究研讨

例题 4.2.1

若 $x - 2y + 3z - 4w = x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 16w^2 = 4$, 则 $xyzw =$ _____.

例题 4.2.2

整数 a, b, c 满足不等式 $a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.

学以致用

习题 4.2.1

若 $abc \neq 0$, $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = 1$, 则 $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{a+c} + \frac{c^2}{a+b} =$ _____.

习题 4.2.2

已知 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14 = 0$, 则 $x + y + z =$ _____.

习题 4.2.3

已知正整数 a, b, c 满足不等式 $a^2 + b^2 + c^2 + 42 < ab + 9b + 8c$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.

数轴、绝对值

知识概要

数轴赋予抽象的代数概念以直观表象, 它直观地表示有理数, 形象地解释相反数, 比较大小, 绝对值的几何意义.

数轴, 是数形结合的典范. 运用数轴, 可将复杂问题简单化, 抽象问题直观化、生动化.

深刻透彻理解绝对值代数意义与几何意义, 并能将其与其它知识巧妙地结合起来解题. 去掉绝对值符号, 分类讨论是关键. 当然分类讨论法有丰富的内涵, 不同问题可能会呈现不同的讨论方式, 注意灵活运用.

定义 4.3.1 (绝对值的代数意义)

正数或零 (即非负数) 的绝对值是其自身, 负数的绝对值是其相反数.

数 a 的绝对值用符号 $|a|$ 来表示, 其含义是

$$|a| = \begin{cases} a, & a > 0, \\ 0, & a = 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

结论 4.3.1

除零外, 绝对值相等的数有两个, 它们恰好互为相反数. 反之, 互为相反数的两个数的绝对值相等. 任何一个实数的绝对值是非负数.

结论 4.3.2 (绝对值常用的性质)

$$(1) |a \cdot b| = |a| \cdot |b|; \quad (2) \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0); \quad (3) |a^2| = |(-a)^2| = a^2.$$

结论 4.3.3

两数 a, b 之差的绝对值为

$$|a - b| = \max\{a, b\} - \min\{a, b\}.$$

结论 4.3.4 (绝对值的三角不等式)

若 a, b 是任意两个实数, 则

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

定义 4.3.2 (绝对值的几何意义)

实数的绝对值表示这个数在数轴上对应的点与原点之间的距离.

$|a - b|$ 表示在数轴上数 a 对应的点与数 b 对应的点之间的距离.

结论 4.3.5

设 A, B 两点的坐标分别为 x_A, x_B , 则线段 AB 的长

$$|AB| = |x_A - x_B| = \max\{x_A, x_B\} - \min\{x_A, x_B\}.$$

即右点坐标减去左点坐标的差.

结论 4.3.6 (中点坐标)

设 A, B 两点的坐标分别为 x_A, x_B , 则线段 AB 的中点坐标为

$$\frac{x_A + x_B}{2}.$$

**探究研讨****例题 4.3.1**

如图 4.3.1, 数轴上点 A 表示数 a , 点 B 表示数 b , AB 表示 A, B 两点之间的距离. a, b 满足 $|a + 3| + (b + 3a)^2 = 0$.

点 P 从点 A 以每秒 3 个单位长度的速度向右运动, 同时点 Q 从点 B 以每秒 2 个单位长度的速度向左运动.

当 $AP + BQ = 2PQ$ 时, 运动时间为 _____ 秒.



图 4.3.1

例题 4.3.2

已知关于 x 的方程 $\left| \frac{2}{3}|x| - 10 \right| = a$.

- (1) 当 $a = 0$ 时, 解此方程 $\left| \frac{2}{3}|x| - 10 \right| = 0$;
- (2) 当 $a > 0$ 时, 原方程有 4 个解, 用 a 的代数式表示出这 4 个解 (从小到大);
- (3) 若 (2) 中方程的 4 个解从小到大成等差数列, 求 a 的值.

例题 4.3.3

若 x 在某个范围内, $2x + |4 - 5x| + |1 - 3x| + 4$ 的值恒为常数, 则当 x 在 _____ 范围时, 这个常数值为 _____.

例题 4.3.4

设 $x_1, x_2, \dots, x_{24}$ 是 $1, 2, 3, \dots, 24$ 的一个排列. 则

$$|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \dots + |x_{23} - x_{24}| + |x_{24} - x_1|$$

的最大值为 _____.

例题 4.3.5

将 $1, 2, \dots, 24$ 随机分成 A, B 两组, 每组 12 个数. 再将 A 组按由小到大的顺序排列, 得到 $a_1, a_2, \dots, a_{12}$; 将 B 组按由大到小的顺序排列, 得到 $b_1, b_2, \dots, b_{12}$.

试说明 $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_{12} - b_{12}|$ 是定值, 并求出这个值.

例题 4.3.6

将 $1 \sim 10$ 随机的排列在一个圆周上, 依次为 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$, 则 $|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + |x_3 - x_4| + \dots + |x_9 - x_{10}| + |x_{10} - x_1|$ 的最小值为 _____.

例题 4.3.7

圆周上 n 个整数 ($n > 3$) 的和为 24, 且每个数都等于它后面 (按顺时针方向) 的两个数的差的绝对值.

- (1) 设其中最大数为 a , 则其后续的两个数分别为 _____;
 (2) n 的所有可能值为 _____.

例题 4.3.8

已知 a, b 为任意实数. 求 $|2a + b|, |2a - b|, |1 - b|$ 三个数中最大数的最小值.

**习题 4.3.1**

满足不等式 $|x - 2014| + |x| \leq 4102$ 的整数 x 的个数为 _____.

习题 4.3.2

将三个数 13, 18, 33 按照一定的顺序重新排成一系列数, 如 18, 33, 13, 则称这列数为“13, 18, 33”的一个排列. 设 a, b, c 为“13, 18, 33”的一个排列. 则关于 x 的方程

$$\left| \left| |x - a| - b \right| - c \right| = 18$$

的最小正整数解为 ().

- (A) 82 (B) 46 (C) 20 (D) 10

习题 4.3.3

若实数 x 在某个范围内, $|3x - 1| + |4x - 1| + \cdots + |17x - 1|$ 的值是一个确定的常数. 则这个常数是 ().

- (A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 75

习题 4.3.4

(1) 将编号为 1, 2, 3, $\dots$, 9 的九个小球随机放置在圆周的九个等分点上, 每个等分点上各放一个小球, 设圆周上所有相邻两个球号码之差的绝对值之和为 S , 则 S 的最小值为 _____.

(2) 在数轴上把坐标为 1, 2, 3, $\dots$, 2006 的点称为标点. 一只青蛙从点 1 出发, 经过 2006 次跳动, 历经所有标点, 且回到出发点. 那么该青蛙所跳过的全部路径的最大长度是 _____.

习题 4.3.5

圆周上 n 个整数 ($n > 3$) 的和为 2018, 且每个数都等于它后面 (按顺时针方向) 的两个数的差的绝对值. 则 n 的所有可能值为 _____.

习题 4.3.6

如图 4.3.2, 已知直线上有 A, B 两点, $AB = 24$. 动点 P 从点 A 出发, 以每秒 3 个单位长度的速度沿直线向左匀速运动; 同时动点 Q 从点 B 出发, 以每秒 2 个单位长度的速度沿直线向右匀速运动, 设点 P 的运动时间为 t ($t > 0$, 单位: 秒). 当 A, P, Q 三个点中恰有一点到另外两点的距离相等时, t 的值为 _____.

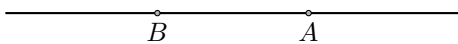


图 4.3.2

习题 4.3.7

已知 x, y 为任意实数, 求 $|11x + 3y|, |9 - 22y|, |11x - 3y|$ 三个数中最大数的最小值.

习题 4.3.8

小明喜爱运用计算机编程研究数学问题. 有一次, 他将 2008 个数 $1, 2, 3, \dots, 2008$ 编程输入计算机, 并让计算机随机地分成两组, 每组 1004 个. 再将其中一组按由小到大的顺序排列, 得到 $a_1, a_2, \dots, a_{1004}$, 另一组按由大到小的顺序排列, 得到 $b_1, b_2, \dots, b_{1004}$, 然后编程让计算机求代数式 $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_{1003} - b_{1003}| + |a_{1004} - b_{1004}|$ 的值. 经过多次随机分组并分别求对应代数式的值, 他发现所得结果居然一样. 你认为所有随机分组的对应代数式的结果总是这个值吗? 如果是, 请说明理由并求这个值; 如果不是, 请你再列举几个可能的值.

一次方程与一次不等式

知识概要

概要 4.4.1

一次方程与一次不等式是代数学的核心基础, 它们不仅是重要的数学工具, 更是培养特定思维能力的载体. 两者既有联系又有区别.

一次方程与一次不等式共同培养的能力: 符号意识与抽象思维、数学建模能力、程序化求解与规则应用能力. 各自侧重的独特能力培养: 一次方程培养“确定性”和“精确性”思维 (精确解思想、等量关系的平衡感、逆向思维), 一次不等式培养“范围性”和“边界性”思维 (范围与区间概念、边界意识与临界点分析、分类讨论能力).

总之, 一次方程是培养精确建模和确定性思维的基石, 一次不等式是引入范围思维、边界意识和分类讨论能力的关键阶梯. 两者共同构成了从处理“确定性”问题到处理“不确定性”或“范围性”问题的桥梁, 是后续学习函数、微积分、线性规划等更高级数学内容的必备基础.

探究研讨

例题 4.4.1

将 $0.1230\bar{1}$ 化成分数为 _____.

例题 4.4.2

商场在一楼和二楼之间安装了一自动扶梯, 以均匀的速度向上行驶, 一男孩和一女孩同时从自动扶梯走到二楼 (扶梯行驶, 两人也走梯). 如果两人上梯的速度都是匀速, 每次只跨 1 级, 且男孩每分钟走动的级数是女孩的 2 倍, 已知男孩走了 27 级到达扶梯顶部, 而女孩走了 18 级到达顶部.

(1) 扶梯露在外面的部分有 _____ 级.

(2) 现扶梯近旁有一从二楼到下到一楼的楼梯道, 台阶的级数与自动扶梯的级数相等, 两个孩子各自到扶梯顶部后按原速度再下楼梯, 到楼梯底部再乘自动扶梯上楼 (不考虑扶梯与楼梯间的距离). 则男孩第一次追上女孩时走了 _____ 级台阶.

例题 4.4.3

(1) 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 2017 \leq x < 3000, \\ x < m \end{cases}$ 有 100 个整数解, 则 m 的取值范围是 _____.

(2) 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 2015 \leq x < 3000, \\ x < m \end{cases}$ 有 50 个被 3 除余 2 的整数解, 则 m 的取值范围是 _____.

例题 4.4.4

已知 6 枝玫瑰与 3 枝康乃馨的价格之和大于 24 元, 而 4 枝玫瑰与 5 枝康乃馨的价格之和小于 22 元, 则 2 枝玫瑰的价格和 3 枝康乃馨的价格比较, 结果是 ().

(A) 2 枝玫瑰价格高

(B) 3 枝康乃馨价格高

(C) 价格相同

(D) 不确定

例题 4.4.5

小林拟将 $1, 2, \dots, n$ 这 n 个数输入电脑, 求平均数. 当他认为输入完毕时, 电脑显示只输入了 $(n-1)$ 个数, 平均数为 $35\frac{5}{7}$, 假设这 $(n-1)$ 个数输入无误, 则漏输入的那个数为 _____.

例题 4.4.6

若满足不等式 $\frac{8}{15} < \frac{n}{n+k} < \frac{7}{13}$ 的整数 k 只有一个, 则正整数 n 的最大值为 _____, 最小值为 _____.

例题 4.4.7

已知 m, n 都是正整数, 且 $\frac{m}{n}$ 是小于 $\frac{16}{37}$ 的最大分数, 使得 $m+n \leq 2010$, 则 $\frac{m}{n} =$ _____, $m+n =$ _____.



学以致用

习题 4.4.1

10 个小朋友围成一个圈, 他们每人想好一个数, 然后将想好的数告诉相邻的两个人, 然后每个人将自己知道的三个数的平均数写在了纸上, 老师发现纸上写的数从某个开始, 顺时针依次是 10 个连续的两位数. 那么, 这 10 个小朋友开始想的数中, 最大的比最小的多 _____.

习题 4.4.2

是否存在实数 x, y, z , 使得

$$x + \frac{1}{y} = z, \quad y + \frac{1}{z} = x, \quad z + \frac{1}{x} = y.$$

习题 4.4.3

n 是自然数, $19n+14$ 与 $10n+3$ 都是某个不等于 1 的自然数 d 的倍数, 那么 $d =$ _____.

习题 4.4.4

将 $2024.01\bar{1}4$ 化成分数为 _____.

习题 4.4.5

从 1 开始写出一组连续的正整数, 然后擦去其中的一个数, 其余数的平均值为 $43\frac{14}{17}$, 则擦去的这个数是 _____.

习题 4.4.6

(1) 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 2015 \leq x < 3000, \\ x < m \end{cases}$ 有 150 个整数解, 则 m 的取值范围是 _____.

(2) 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases} 2018 \leq x < 3000, \\ x < m \end{cases}$ 有 30 个被 5 除余 4 的整数解, 则 m 的

取值范围是 _____.

习题 4.4.7

设 a, b 为正整数, 且 $\frac{5}{9} < \frac{a}{b} < \frac{4}{7}$, 当 b 最小时, 则 $\frac{a}{b} =$ _____.

习题 4.4.8

已知 n, k 均为正整数, 且满足不等式 $\frac{7}{13} < \frac{n}{n+k} < \frac{6}{11}$.

若对于某一给定的正整数 n , 只有唯一的一个正整数 k 使不等式成立, 则所有满足要求的正整数 n 中的最大值和最小值之乘积为 _____.



几何部分



长度角度面积与体积

导言

本章主要讲解长度与角度、面积与体积.

长度与角度

知识概要

概要 5.1.1 (相交线、平行线)

1. 邻补角、对顶角

- (1) 邻补角、对顶角的定义: 两条直线相交, 得到四个角, 其中有一条公共边的两个角互为邻补角; 而没有公共边的两个角叫作对顶角.
- (2) 对顶角的性质: 对顶角相等.

2. 垂直, 垂线的唯一性, 垂线段最短

- (1) 垂直的判定: 两条直线相交所成的角中, 如果有一个是直角, 那么这两条直线互相垂直.
- (2) 垂线的唯一性: 过一点有且只有一条直线与已知直线垂直.
- (3) 垂线段最短: 直线外一点与直线内各点的连线中, 垂线段最短.

3. 平行, 平行线的唯一性 (平行第五公设)

- (1) 平行的判定: 在同一平面内没有公共点的两条直线是平行线.
- (2) 平行线的唯一性: 经过直线外一点有且仅有一条直线与已知直线平行.

4. 平行线的判定与性质

- (1) 同位角相等, 两直线平行; 反之, 两直线平行, 同位角相等.
- (2) 内错角相等, 两直线平行; 反之, 两直线平行, 内错角相等.
- (3) 同旁内角互补, 两直线平行; 反之, 两直线平行, 同旁内角互补.

概要 5.1.2 (三角形的边角)

1. 三角形的内角和、外角和

- (1) 三角形的内角和为 180° , 外角和为 360° .
三角形的外角, 等于与其不相邻的两个内角之和.
- (2) 凸 n 边形的内角和为 $180^\circ (n - 2)$, 外角和为 360° .

2. 三角形的三边关系

- (1) 三边关系定理: 三角形中, 任意两边之和大于第三边, 任意两边之差小于第三边.
若三条线段中最大者小于另两条的和, 则这三条线段能围成三角形.

(2) 勾股定理: 直角三角形中, 两条直角边的平方和等于斜边的平方.

锐角三角形中, 最大边的平方小于另两边的平方和.

钝角三角形中, 最大边的平方大于另两边的平方和.

3. 三角形的边角关系

(1) 等边对等角, 等角对等边.

(2) 大边对大角, 大角对大边.

概要 5.1.3 (角平分线的性质与判定)

1. (性质) 角平分线上的任意一点到角两边的距离相等.

2. (判定) 角的内部到角两边距离相等的点在这个角的平分线上.



探究研讨

例题 5.1.1

是否存在空间中的 5 个点, 使得两两之间的距离分别为 $1, 2, \dots, 10$?

例题 5.1.2

如图 5.1.1, 有一个正方体形的铁丝架, 把它的侧棱中点 I, J, K, L 也用铁丝连上.

(1) 现有一个蚂蚁想沿着铁丝从 A 点爬到 G 点, 问最近的路线一共有几条? 并用字母把这些路线表示出来 (用所经过的连结点字母来表示, 譬如蚂蚁从 A 点出发, 经过 I 点、 L 点, 最后到达 H 点, 这样的路线用 $AILH$ 表示).

(2) 蚂蚁是不是可能从 A 点出发, 沿着铁丝经过每一个连结点恰好一次, 最后到达 G 点? 如果可能, 请找出一条这样的路线; 如果不可能, 说明为什么?

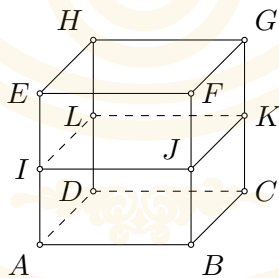


图 5.1.1

例题 5.1.3

两条直线相交所成的锐角或直角称为两条直线的“夹角”. 现平面上有 W 条直线, 它们两两相交, 并且“夹角”只能是 $15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$ 之一, 问:

(1) W 的最大值是多少?

(2) 当 W 取最大值时, 问所有的“夹角”的和是多少?

例题 5.1.4

如图 5.1.2, $AB \parallel CD$, AC, BD 交于 O , $\angle A, \angle D$ 的角平分线交于 E . 已知 $\angle E = 50^\circ$, 求 $\angle AOB$.

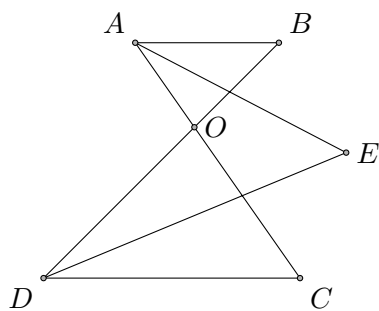


图 5.1.2

例题 5.1.5

如图 5.1.3, $ABCDEFG$ 是一个正七边形, 点 P 是其形内一点, 使得 $\triangle ABP$ 为等边三角形, 则 $\angle CPE =$ _____.

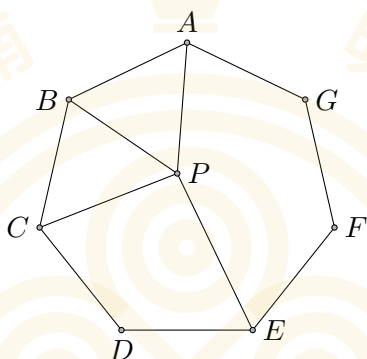


图 5.1.3

例题 5.1.6

如图 5.1.4, 四边形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O , $\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$, $\angle CBD = 55^\circ$, $\angle ADB = 50^\circ$. 则 $\angle AOB$ 的度数为 _____.

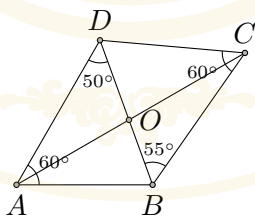


图 5.1.4



学以致用

习题 5.1.1

长方形 $ABCD$ 中, $AB = 72$, $AD = 120$, 将 AB 分成 72 等份, 将 AD 分成 120 等份, 过 AB 的每个等分点作 AD 的平行线, 过 AD 的每个等分点作 AB 的平行线, 将长方形分成边长为 1 的 72×120 个小正方形, 连对角线 AC , 则被 AC 从内部穿过的小正方形共有 _____ 个.

习题 5.1.2

时钟里, 时针从 4 点整的位置起, 顺时针方向旋转 _____ 度时, 分针与时针第一次重合.

习题 5.1.3

如图 5.1.5, $\triangle ABC$ 的外角 $\angle ACD$ 的平分线 CP 与内角 $\angle ABC$ 平分线 BP 交于点 P , 若 $\angle BPC = 42^\circ$, 则 $\angle CAP$ 的度数为 _____.

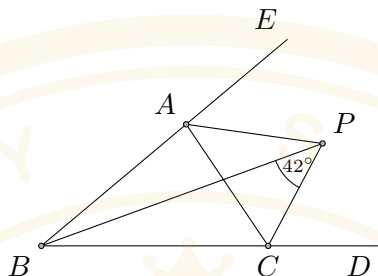


图 5.1.5

习题 5.1.4

如图 5.1.6, 四边形 $ABCD$ 中, 连对角线 AC 与 BD , 且
 $\angle ABD = 40^\circ$, $\angle ADB = 80^\circ$, $\angle CBD = 70^\circ$, $\angle CDB = 50^\circ$.
 则 $\angle CAB$ 的度数为 _____.

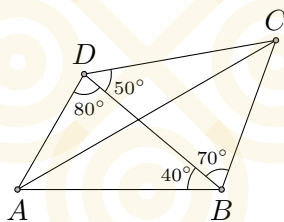


图 5.1.6

面积与体积

知识概要

概要 5.2.1

几何中的面积与体积是从二维平面过渡到三维空间, 培养的能力非常综合和深刻. 所培养的数学核心能力有空间想象能力、从二维到三维的升华与抽象思维、公式的理解与推导能力、度量观念与单位感, 通用思维与问题解决能力有“转化与化归”的数学思想 (如分割法、填补法、等积变形等)、数形结合能力、严谨的逻辑推理与证明能力、解决实际问题的能力 (应用建模含面积应用、体积应用, 有无数实际应用场景).

思维进阶, 从“公式使用者”到“策略思考者”; 培养过程, 有分析图形、制定策略、执行计算、反思与推广.

总之, 几何中的面积与体积是一个强大的思维训练系统, 它从具体的图形测量出发, 最终目标是培养学生的空间想象、逻辑推理、策略转化和数学建模等核心素养. 这些能力不仅对后续学习 (如解析几何、微积分) 至关重要, 也对培养一个有条理、有创造力的问题解决者具有深远影响.

探究研讨

例题 5.2.1

如图 5.2.1, 正方形 $ABCD$ 中, E 、 F 、 G 、 H 分别在边 AB 、 BC 、 CD 、 DA 上, 且 $AE = BF = CG = DH = 7$, $AH = BE = CF = DG = 3$, 连 AF 、 BG 、 CH 、 DE , AF 与 DE 交于 P , AF 与 BG 交于 Q , BG 与 CH 交于 R , CH 与 DE 交于 S , 得到正方形 $PQRS$, 则正方形 $PQRS$ 的面积是 _____.

注: 如图 5.2.2, 直角三角形 ABC 的两条直角边长为 a 、 b , 斜边长为 c , 则 $a^2 + b^2 = c^2$.

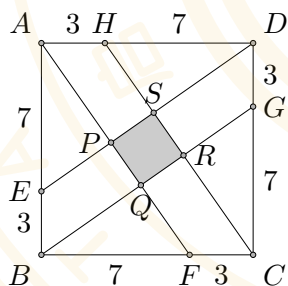


图 5.2.1

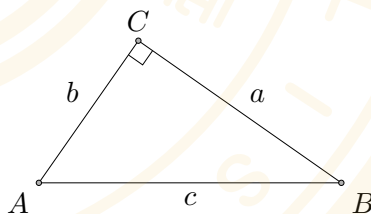


图 5.2.2

例题 5.2.2

已知: 如图 5.2.3, $\triangle ABC$ 的三条中线 CF 、 AD 、 BE 的长分别为 3cm、4cm、5cm. 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____ cm^2 .

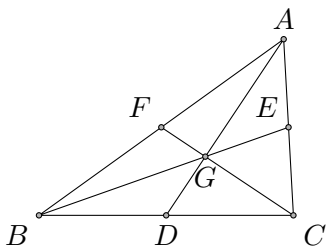


图 5.2.3

例题 5.2.3

如图 5.2.4, 在长方形 $KJIF$ 中, $ABCD$ 、 $CEFG$ 、 $AJIH$ 是三个正方形, 已知长方形 $ADEK$ 的面积为 30 平方厘米, 长方形 $CDHG$ 的面积为 42 平方厘米, 那么长方形 $KJIF$ 的面积是 _____ 平方厘米.

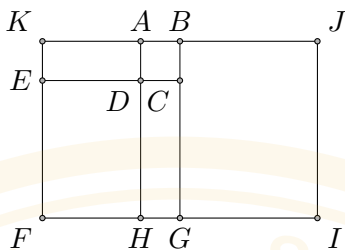


图 5.2.4

例题 5.2.4

(1) 如图 5.2.5, 用一条线平分 5 个正六边形.

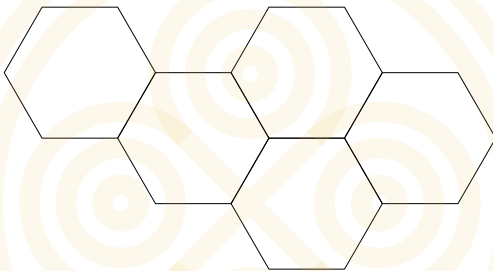


图 5.2.5

(2) 如图 5.2.6, 若每个正六边形的面积为 1, 求三角形 ABC 的面积.

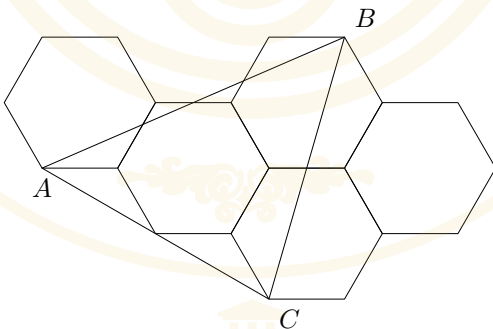


图 5.2.6

例题 5.2.5

给定边长为 1 的正方形 $ABCD$. 点 K, L, M, N 分别是线段 AB, BC, CD, DA 上一点, 且均不与顶点重合. 证明: $\triangle ANK, \triangle BKL, \triangle CLM, \triangle DMN$ 中至少有一个三角形的周长小于 2.

注: 原题无图.

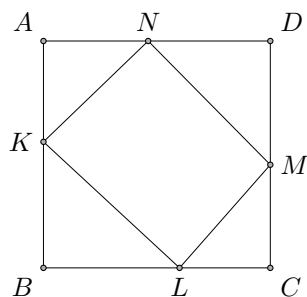


图 5.2.7

例题 5.2.6

是否存在一个四面体, 其中边的长度是六个不同的整数, 它们的和是 25?

**习题 5.2.1**

如图 5.2.8, 已知四边形 $ABCD$ 面积为 1, 将 AB , BC , CD 和 DA 延长一倍, 四边形 $EFGH$ 的面积为 _____.

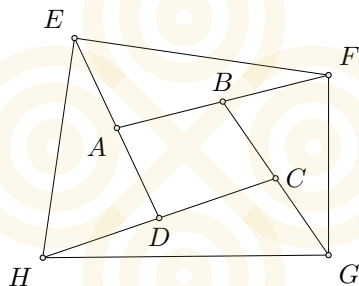


图 5.2.8

习题 5.2.2

如图 5.2.9, 5 个小正方形, 每个边长为 6, BC 穿过后两部分面积相等, 则 $AB =$ _____.

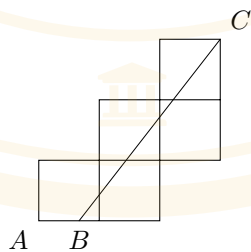


图 5.2.9

习题 5.2.3

如图 5.2.10, 正方形 $ABCD$ 的边长为 1 米, E 、 F 分别在 CD 、 BC 边上, 且满足 $\frac{DE}{EC} = \frac{BF}{FC} = \frac{1}{2}$, BE 与 DF 交于点 G , 则四边形 $ABGD$ 的面积为 _____.

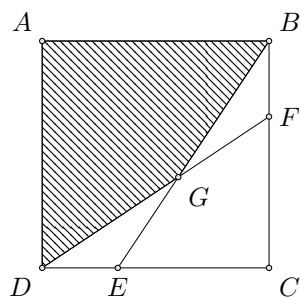


图 5.2.10

习题 5.2.4

如图 5.2.11, $\triangle ABC$ 中, $AB = 12\text{cm}$, $AC = 9\text{cm}$, $BC = 13\text{cm}$, 自 A 分别作 $\angle C$ 平分线的垂线, 垂足为 M , 作 $\angle B$ 的平分线的垂线, 垂足为 N , 连结 MN , 则 $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

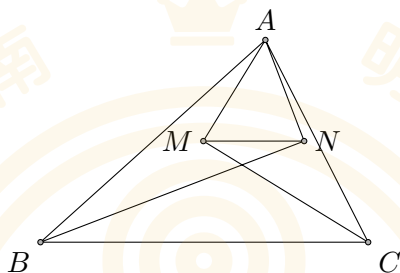


图 5.2.11

习题 5.2.5

两条直线在边长为 1 的正方形内相交, 将此正方形分成四个部分. 证明: 至少有 1 个部分的周长不小于 2.

全等三角形与特殊三角形

导言

本章主要讲解全等三角形与全等变换、等腰(边)三角形与直角三角形.

🎓 全等三角形与全等变换

📖 知识概要

概要 6.1.1

1. 全等三角形的定义: 能完全重合的两个三角形, 称为全等三角形.

全等三角形的判定: SAS(边角边)、ASA(角边角)、AAS(角角边)、SSS(边边边); 另外直角三角形的全等判定: HL(斜边直角边).

全等三角形的性质: 全等三角形的对应边相等, 对应角相等, 对应线段相等.

2. 全等变换: 反射(翻折)变换、旋转变换、平移变换.

3. 全等的常见几何模型. 比如, 最经典的手拉手模型. 几何解题研究者总结了很多细化的手拉手模型的结论拓展.

🔍 探究研究

📌 全等三角形

例题 6.1.1

下列四个判断:

- (1) 三角形 6 个边、角元素中, 有 5 个元素分别相等的两个三角形全等;
- (2) 有两边及其中一边上的高对应相等的两个三角形全等;
- (3) 有两边及第三边上的高对应相等的两个三角形全等;
- (4) 一边及其他两边上的高对应相等的两个三角形全等.

上述判断是否正确? 若正确, 说明理由; 若不正确, 请举出反例.

📌 反射变换

例题 6.1.2

$\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, I 是其内心(三角形的三条角平分线的交点), 且 $BC = AB + AI$. 则 $\angle BAC$ 的度数为 _____.

例题 6.1.3

如图 6.1.1, 在等边凸六边形 $ABCDEF$ 中, 其顶点满足 $\angle A + \angle C + \angle E = \angle B + \angle D + \angle F$. 求证: $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$.

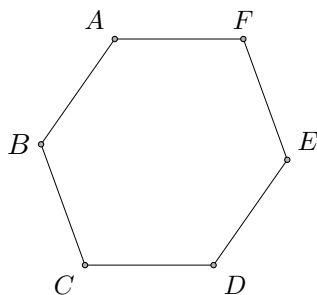


图 6.1.1

**例题 6.1.4**

如图 6.1.2, 以 $\text{Rt}\triangle BCA$ 的斜边 BC 为一边在 $\triangle BCA$ 的同侧作正方形 $BCEF$, 设正方形的中心为 O , 连接 AO , 如果 $AB = 4$, $AO = 6\sqrt{2}$, 那么 AC 的长为 ().

- (A) 12 (B) 16 (C) $4\sqrt{3}$ (D) $8\sqrt{2}$

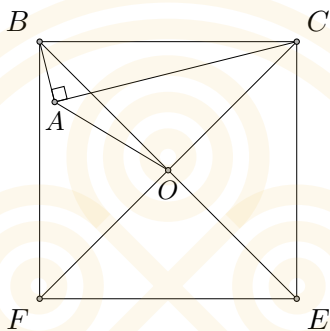


图 6.1.2

例题 6.1.5

如图 6.1.3, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABD = \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$, $AC = 4$, $BC = 3$. 则 $CD =$ _____.

注: 利用图 6.1.3, 6.1.4, 可考虑多种不同辅助线作法.

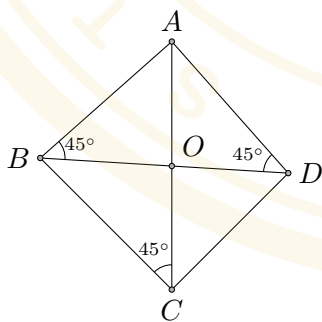


图 6.1.3

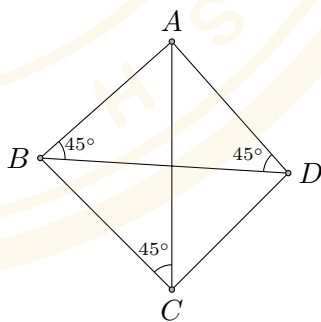


图 6.1.4

例题 6.1.6

如图 6.1.5, $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是两个不全等的等腰直角三角形, 固定 $\triangle ABC$, 将 $\triangle ADE$ 绕 A 点在平面内旋转. 如图 6.1.6, 试证不论 $\triangle ADE$ 转到什么位置, 线段 EC 上必存在点 M , 使 $\triangle BMD$ 是等腰直角三角形.

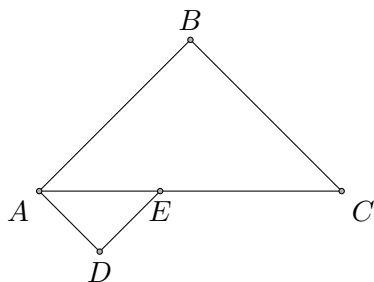


图 6.1.5

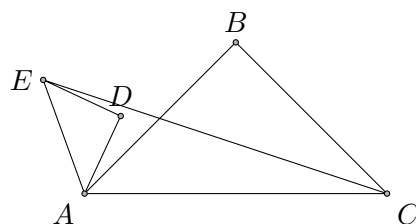


图 6.1.6

例题 6.1.7

如图 6.1.7, $\triangle ABC$ 和 $\triangle PQR$, 其中 $\angle ADB = \angle BDC = \angle CDA = 120^\circ$.
求证: $x = u + v + w$.

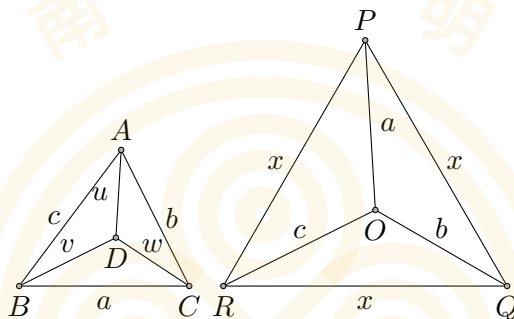


图 6.1.7

 平移变换

例题 6.1.8

如图 6.1.8, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, M, N 分别是 AC, BC 上的点, 且 $MN \parallel AB$, P, Q 分别为 MN, AB 的中点. 求证: $PQ = \frac{1}{2}(AB - MN)$.

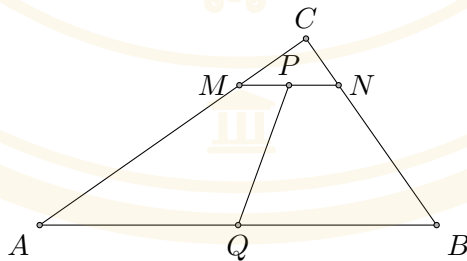


图 6.1.8

例题 6.1.9

如图 6.1.9, 六边形 $ABCDEF$ 中, $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$, $CD \parallel AF$, 其各对边之差相等, 即 $BC - EF = ED - AB = AF - CD > 0$. 求证: 六边形 $ABCDEF$ 的各角相等.

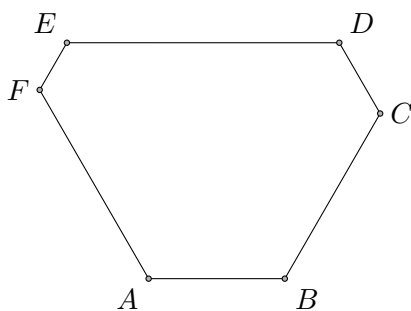


图 6.1.9



学以致用

习题 6.1.1

判断下列两个三角形是否全等:

- (1) $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中, $\angle A = \angle D = 99^\circ$, $AB = DE = 12$, $BC = EF = 20$.
- (2) 两个等腰三角形的周长相等, 面积也相等.

习题 6.1.2

$\triangle ABC$ 的内心 (三条角平分线的交点) 为 I , $\angle BAC = 70^\circ$, $AC + AI = BC$, 则 $\angle AIB =$ _____.

习题 6.1.3

如图 6.1.10, 已知 D 是 $\triangle ABC$ 中的一点, 且 $\angle ABC = \angle BCD = \angle DAB = 45^\circ$, $BD = 6$, 则 $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle BCD} =$ _____.

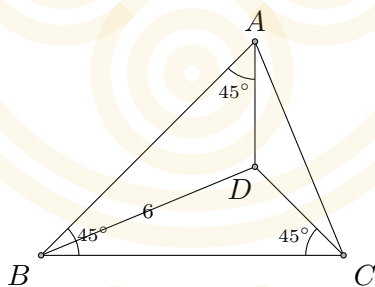


图 6.1.10

习题 6.1.4

如图 6.1.11, 设 P 为等边 $\triangle ABC$ 内一点, $AP = 3$, $BP = 4$, $CP = 5$, 则 (凹) 四边形 $ABCP$ 的面积为 _____.

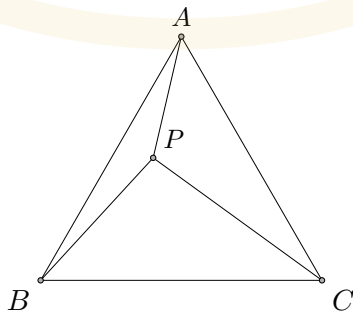


图 6.1.11

习题 6.1.5

(1) 如图 6.1.12, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABD = \angle ACD = \angle ADB = 60^\circ$, 并且 $AC = 15$, $CD = \frac{29}{4}$, 则 $BC =$ _____.

注: 可考虑多种不同辅助线作法.



图 6.1.12

(2) 如图 6.1.13, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABD = \angle ACB = \angle ADB = 30^\circ$, $AC = 7$, $BC = 6$. 则 $CD =$ _____.

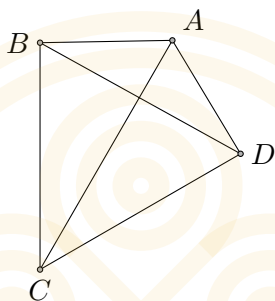


图 6.1.13

(3) 如图 6.1.14, 四边形 $ABCD$ 中, $\angle ABD = \angle ACB = \angle ADB = 75^\circ$, $AC = 7$, $BC = 2$. 则 $CD =$ _____.

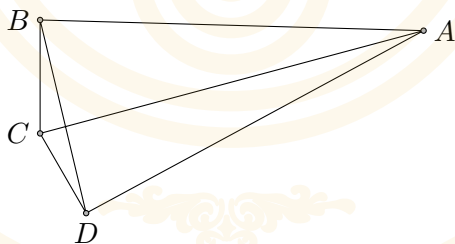


图 6.1.14

习题 6.1.6

如图 6.1.15, 在某次军事演习中, 舰艇甲在指挥中心 (O 处) 北偏西 30° 的 A 处, 舰艇乙在指挥中心南偏东 70° 的 B 处, 并且两舰艇到指挥中心的距离相等, 接到行动指令后, 舰艇甲向正东方向以 60 海里/时的速度前进, 舰艇乙沿北偏东 50° 的方向以 80 海里/时的速度前进, 1.5 小时后, 指挥中心观测到甲、乙两舰艇分别到达 E 、 F 处, 且两舰艇之间的夹角为 70° , 则此时两舰艇之间的距离为 _____ 海里.

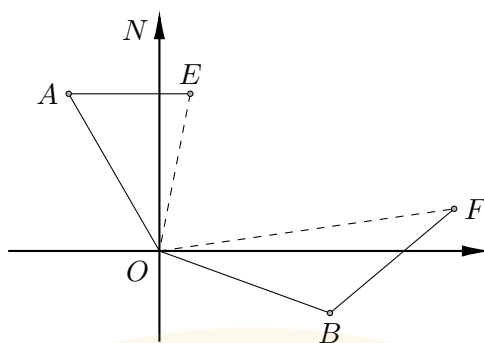


图 6.1.15

习题 6.1.7

如图 6.1.16, 正方形 $ABCD$ 中, E, F, G, H 分别是各边上的点, 且 $EG \perp HF$. 求证: $EG = HF$.

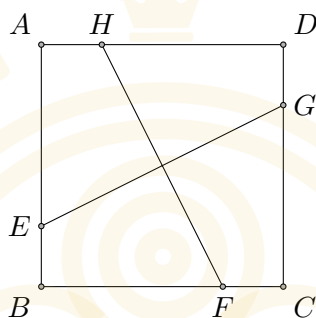


图 6.1.16

习题 6.1.8

如图 6.1.17, 在正方形 $ABCD$ 中, $MN \perp AB$, 分别交 AB, CD 于点 M, N , 点 E 在 DA 的延长线上, 连结 BE , 交 MN 于点 O , 过 O 作 $OP \perp BE$, 分别交直线 AB, CD 于点 P, Q . 则 AE, MP, NQ 之间的数量关系是 _____.

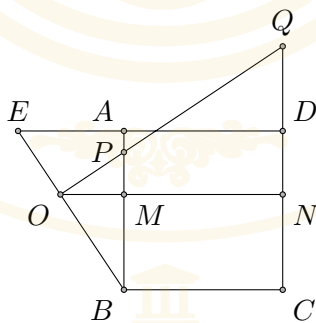


图 6.1.17

🎓 等腰(边)三角形

👤 知识概要

概要 6.2.1

等腰三角形和等边三角形是平面几何中两个极为重要且美丽的图形. 它们不仅是特殊的三角形, 更是几何推理和证明的“基石”.

其核心几何能力与思维模式: “性质-判定”的双向逻辑思维 (正向和逆向思考)、对称性思维的直观建立 (轴对称“三线合一”的直观感知)、分类讨论思想 (严谨性和全面性)、从特殊到一般的归纳能力, 问题解决与策略性能力: 辅助线的构造策略 (洞察力、策略规则和创造性)、复杂图形的分解与识别 (模式识别能力和化繁为简的能力).

总之, 学习等腰三角形和等边三角形, 远不止于记住几条性质定理. 它更像是一个思维训练营, 系统地锤炼学生的逻辑推理能力、对称直觉、分类讨论的严谨性以及添加辅助线的策略性创造力. 这些能力是攀登更高层次几何 (乃至整个数学) 山峰的坚实阶梯.

👤 探究研讨

例题 6.2.1

$\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, BD 平分 $\angle ABC$ 交 AC 于 D , $BC \vee AD + BD$. 求证: $\angle A \vee 100^\circ$.

注: 这里的符号可以表示“=”, “<”, 或“>”. $\vee$ 与 $\wedge$ 表示相反关系.

具体地说, 当 $\vee$ 表示 $>$ 时, $\wedge$ 表示 $<$; 当 $\vee$ 表示 $<$ 时, $\wedge$ 表示 $>$.

当 $\vee$ 表示 $\geq$ 时, $\wedge$ 表示 $\leq$; 当 $\vee$ 表示 $\leq$ 时, $\wedge$ 表示 $\geq$.

例题 6.2.2

如图 6.2.1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = \angle BCA = 44^\circ$, M 为 $\triangle ABC$ 内一点, 使得 $\angle MCA = 30^\circ$, $\angle MAC = 16^\circ$. 则 $\angle BMC$ 的度数为 _____.

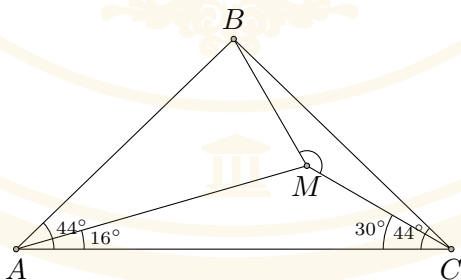


图 6.2.1

例题 6.2.3

如图 6.2.2, P 是 $\triangle ABC$ 内部的一点, 且 $\angle PAB = 10^\circ$, $\angle PBA = 20^\circ$, $\angle PCA = 30^\circ$, $\angle PAC = 40^\circ$. 求证: $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

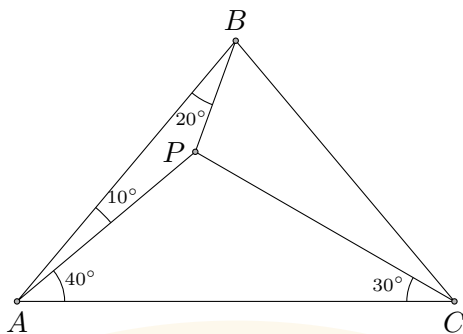


图 6.2.2

例题 6.2.4

设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点, 使得 $\angle PBC = 30^\circ$, $\angle PBA = 8^\circ$, 且 $\angle PAB = \angle PAC = 22^\circ$. $\angle APC$ 的度数为 _____.

例题 6.2.5

如图 6.2.3, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = \angle BAC = 70^\circ$, P 为形内一点, $\angle PAB = 40^\circ$, $\angle PBA = 20^\circ$, 求证: $PA + PB = PC$.

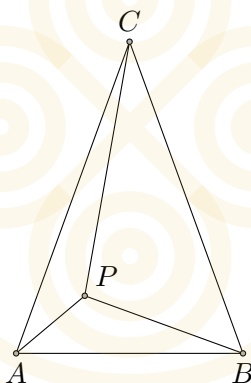


图 6.2.3

例题 6.2.6

如图 6.2.4, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 边 CA 沿着过点 A 的某条直线对折得到 DA , 连接 CD , 以 CD 为边在左侧作 $\triangle CDE$, 其中 $\angle CDE = 90^\circ$, $CD = DE$, AD 与 CE 交于点 F , 连接 BD . 当 D 在 $\triangle ABC$ 内部时, 若点 F 为 AD 的中点, 且 $EF = 2$, 求 BD 的长.

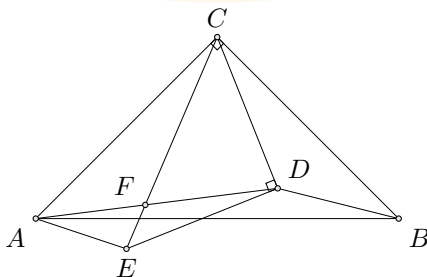


图 6.2.4



习题 6.2.1

如图 6.2.5, AA' , BB' 分别是 $\angle EAB$, $\angle DBC$ 的平分线, 若 $AA' = BB' = AB$, 则 $\angle BAC$ 的度数为 _____.

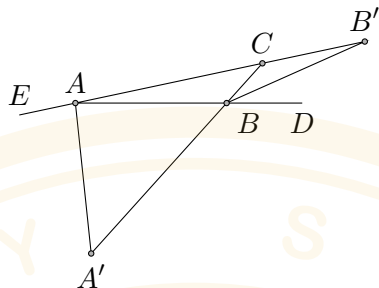


图 6.2.5

习题 6.2.2

$\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $AE \perp BC$ 于 E , 在 BC 上取 $CD = CA$, 连结 AD , 若 $AD = DB$, 则 $\angle DAE$ 的大小是 _____.

习题 6.2.3

如图 6.2.6, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAD = 30^\circ$, 且 $AE = AD$, 则 $x =$ _____ 度.

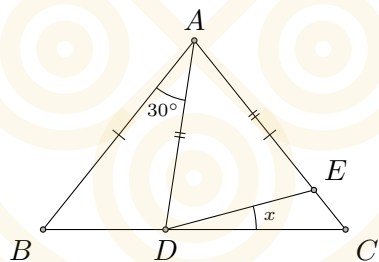


图 6.2.6

习题 6.2.4

如图 6.2.7, $\triangle ABC$ 是等边三角形, P 是 BC 上任意一点, $PD \perp AB$, $PE \perp AC$, 连 DE , 记 $\triangle ADE$ 的周长为 L_1 , 四边形 $BDEC$ 的周长为 L_2 , 则 L_1 与 L_2 的大小关系为 ().
 (A) $L_1 = L_2$ (B) $L_1 > L_2$ (C) $L_2 > L_1$ (D) 无法确定

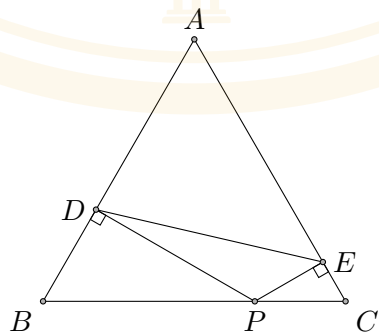


图 6.2.7

习题 6.2.5

$\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 80^\circ$, P 为 $\triangle ABC$ 内一点, 满足 $\angle PBC = 10^\circ$, $\angle PAB = 70^\circ$. 则 $\angle PCA =$ _____.



直角三角形

知识概要

概要 6.3.1

直角三角形的重要性甚至超过等腰三角形和等边三角形. 它之所以如此关键, 是因为它完美地连接了形状 (几何) 与数量 (代数), 培养的能力极为深刻和实用.

其核心数学思想与能力: 数形结合的典范 (勾股定理)、函数与建模思想的萌芽 (锐角三角函数, 定量描述形状、函数思想、实际应用建模)、推理与证明的核心工具 (全等与相似判定), 问题解决与策略性能力: 构造辅助线的第一选择 (垂线)、方程思想在几何中的广泛应用等, 实际应用能力: 测量、工程与建筑、导航与定位.

总之, 学习直角三角形, 是从直观、定性的几何感知, 迈向精确、定量的数学分析的关键一步. 它培养的不仅是几何知识, 更是一种用数学眼光观察世界、用数学工具解决实际问题的强大能力.

探究研讨

例题 6.3.1

如图 6.3.1, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $\triangle ABC$ 的面积为 a , $AB = b$, CD 为中线, 且 $\angle ACD = 22.5^\circ$, 过点 D 作 $ED \perp CD$ 交 AC 于点 E . 则 $\triangle ADE$ 的面积为 _____ (用含 a 与 b 的式子表示).

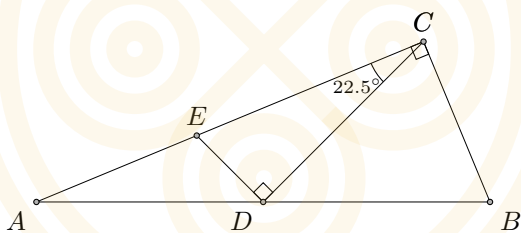


图 6.3.1

例题 6.3.2

如图 6.3.2, $\triangle ABC$ 中, 点 E 为 BC 中垂线上一点, 将 AE 绕点 A 顺时针旋转 60° 得 AG , 点 G 恰好在 AB 边上, 连接 GE , 点 F 为 BG 中点, 连接 FE 并延长, 交 AC 于点 D , $\angle GEF = \angle EAD$, 求证: $AC = 2EF$.

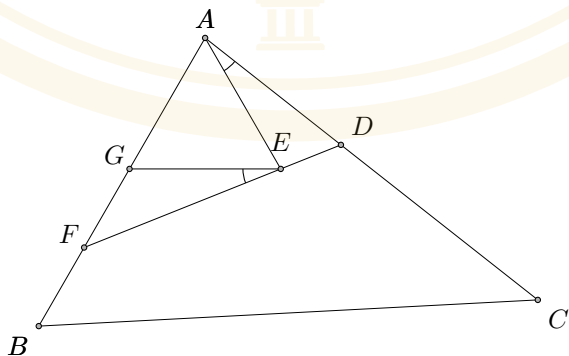


图 6.3.2

例题 6.3.3

如图 6.3.3, $A_1A_2A_3\cdots A_9$ 是一个正九边形, $A_1A_2 = a$, $A_1A_3 = b$, 则 A_1A_5 等于 ().

(A) $\sqrt{a^2 + b^2}$

(B) $\sqrt{a^2 + ab + b^2}$

(C) $\frac{1}{2}(a + b)$

(D) $a + b$

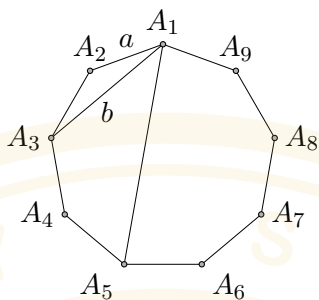


图 6.3.3

例题 6.3.4

已知锐角三角形的三边边长都是整数, 其中两条边长分别为 3 和 4, 则第三条边的边长为 _____.

例题 6.3.5

如图 6.3.4, H 是 $\triangle ABC$ 的垂心 (三条高的交点). 求证:

$$AH^2 + BC^2 = BH^2 + AC^2 = CH^2 + AB^2.$$

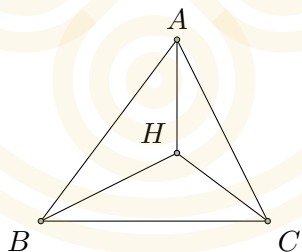


图 6.3.4

例题 6.3.6

如图 6.3.5, K 为 $\triangle ABC$ 内一点, 过点 K 作三条边的垂线 KM 、 KN 、 KP , 若 $AM = 3$, $BM = 5$, $BN = 4$, $CN = 2$, $CP = 4$, 则 $AP^2 =$ _____.

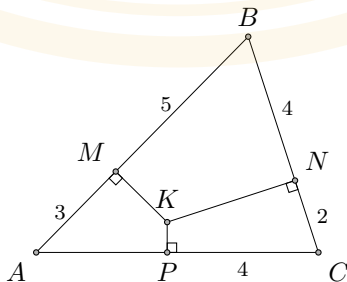


图 6.3.5

例题 6.3.7

如图 6.3.6, $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 45^\circ$, $AD \perp BC$ 于 D , 且 $BD = 2$, $CD = 3$. 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____.

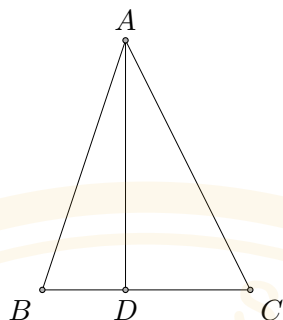


图 6.3.6



学以致用

习题 6.3.1

如图 6.3.7, $\triangle ABC$ 中, $\angle C = 90^\circ$, M 为 AB 的中点, P, Q 分别是边 AC, BC 上的点, 且 $\angle PMQ = 90^\circ$. 求证: $PQ^2 = AP^2 + BQ^2$.

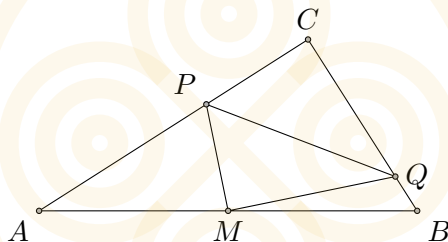


图 6.3.7

习题 6.3.2

如图 6.3.8, 直角 $\triangle ABC$ 中, AD 为斜边 BC 上的高. 设 DE 为直角 $\triangle ADB$ 斜边上的高, DF 为直角 $\triangle ADC$ 斜边上的高. 设 A 关于 EF 的对称点为 A_1 , 点 A_1 关于 AB, AC 的对称点分别为 A_2, A_3 . 求证: A_2A_3 过点 A .

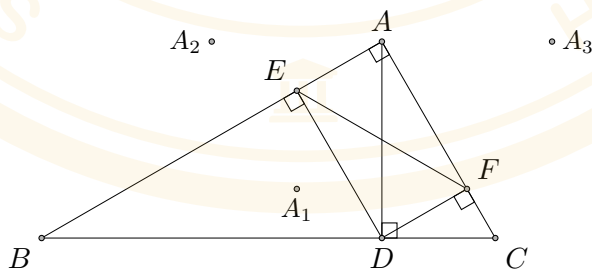
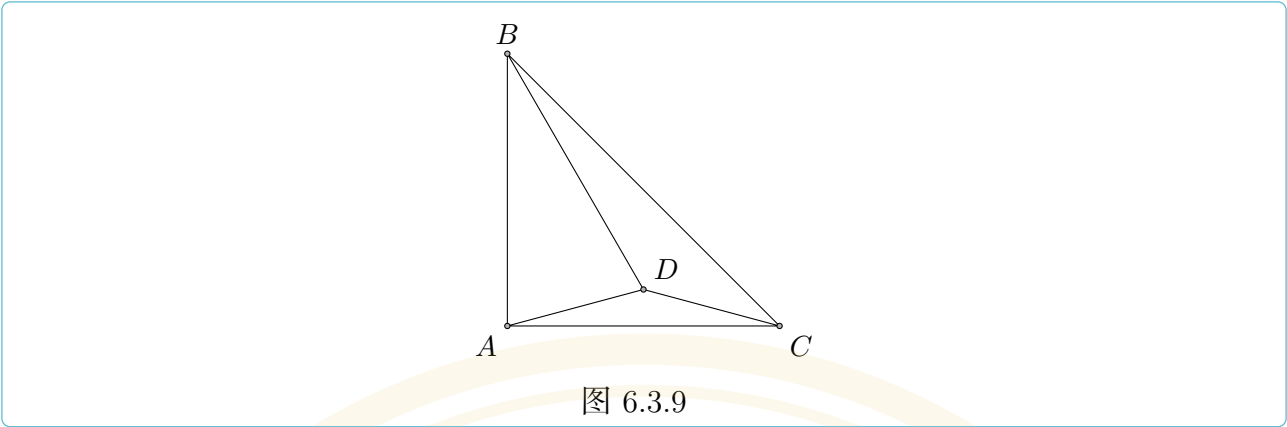


图 6.3.8

习题 6.3.3

如图 6.3.9, $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$. D 是 $\triangle ABC$ 内的一点, $\angle DAC = \angle DCA = 15^\circ$. 求证: $BD = BA$.



几何画图与几何定最值

导言

本章主要讲解几何画图、几何定值与几何最值.

 几何画图

 知识概要

概要 7.1.1

尺规作图是几何中既古老又充满魅力的技能,它仅借助直尺和圆规这两种简单作图工具,便能创造出各种精确而美妙的图形,对几何的学习、理解与应用大有裨益.

本节主要介绍更加灵活、更具创意的网格作图、两把三角尺作图、只用直尺或只用圆规作图等不拘一格的作图题的方法.

 探究研讨

例题 7.1.1

如图 7.1.1, 已知五边形 $ABCDE$ 中, $AB \parallel ED$, $\angle A = \angle B = 90^\circ$, 则可以将该五边形 $ABCDE$ 分成面积相等的两部分的直线有 _____ 条, 满足条件的直线可以这样去确定: _____.

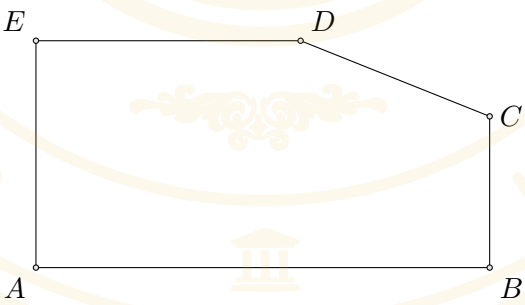


图 7.1.1

例题 7.1.2

如图 7.1.2, 将 $\triangle ABC$ 放在每个小正方形的边长为 1 的网格, 点 A , 点 B , 点 C 均落在格点上. 请在如图所示的网格中, 用无刻度的直尺, 画出一个以 AB 为一边的矩形, 使该矩形的面积等于 $AC^2 + BC^2$, 并简要说明画图方法.

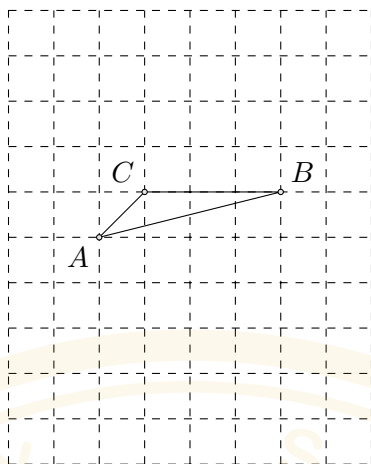


图 7.1.2

例题 7.1.3

如图 7.1.3, 已知 $\triangle ABC$ 中, 正方形 $XYZW$ 的顶点 X 在 AB 边上, Y, Z 在 BC 边上. 请你用两把三角尺作出正方形 $DEFG$, 使得 E, F 都在边 BC 上, D, G 分别在边 AB, AC 上. 图中保留画图痕迹并说明大致画图方法.

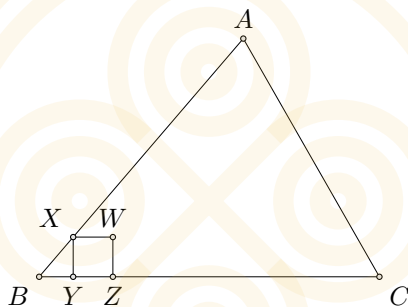


图 7.1.3

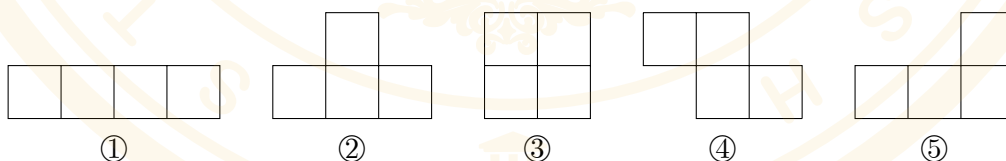
**习题 7.1.1**

图 7.1.4

如图 7.1.4, 上面每个图形都是由 4 个边长为 1 厘米的小正方形拼成的, 请你从中任意选择几个图形 (每个图形可以反复使用或者进行翻转), 拼成一个边长为 4 厘米的大正方形 (至少选择 4 种拼法, 可以动手画一画哦, 也可以把选择的图形号码写下来, 如: 几个 ① 号).

习题 7.1.2

用直尺和圆规作一个角 (不是平角) 的平分线, 但圆规只能使用两次 (即只能用圆规画两个弧), 直尺的使用次数不限, 请给出一种画法, 并证明你的结论.

习题 7.1.3

在 $\triangle ABC$ 的内部有一点 P , 满足

$$S_{\triangle PAB} : S_{\triangle PBC} : S_{\triangle PCA} = 1 : 2 : 3,$$

请在如图 7.1.5 所示的网格中, 用无刻度的直尺, 画出点 P , 并简要说明点 P 的位置是如何找到的 (不要求证明)

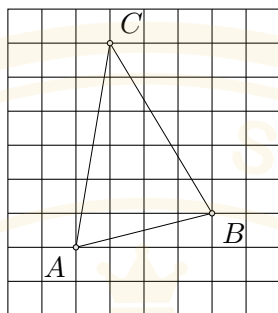


图 7.1.5

几何定值

知识概要

概要 7.2.1

几何定值问题是指当一个几何图形在特定规则下运动变化时, 证明某个几何量始终保持不变. 这更像一个“侦探游戏”, 需要先猜后证. 这类问题培养“洞察”与“证明”的思维 (抓住本质、探究与猜想能力、对“不变性”的深刻理解、极强的逻辑推理能力与综合证明能力), “以不变应万变”.

探究研讨

例题 7.2.1

如图 7.2.1, 将正方形 $ABCD$ 沿 EF 折叠 (点 E 、 F 分别在边 AB 、 CD 上), 使点 B 落在 AD 边上的点 M 处, 点 C 落在点 N 处, MN 与 CD 交于点 P . 试判断随着落点 M 在 AD 边上取遍所有的位置 (点 M 不与 A 、 D 重合), $\triangle PDM$ 的周长是否发生变化? 请说明理由.

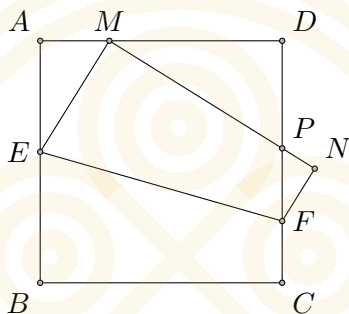


图 7.2.1

例题 7.2.2

已知: 如图 7.2.2, 等边 $\triangle ABC$ 的边长为 a , O 是其内部任意一点, 过点 O 分别作 $OD \perp AB$ 、 $OE \perp BC$ 、 $OF \perp CA$, 垂足分别为 D 、 E 、 F .

求证: (1) $OD + OE + OF = \frac{\sqrt{3}}{2}a$; (2) $AD + BE + CF = \frac{3}{2}a$.

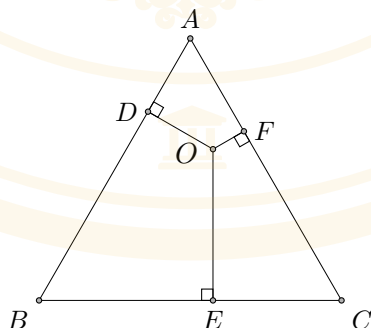


图 7.2.2

例题 7.2.3

如图 7.2.3, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, AB 、 AC 的中点分别为 M 、 N , 点 P 为线段 MN 上任一点, BP 交 AC 于点 E , CP 交 AB 于点 F . 试问 $\frac{1}{BF} + \frac{1}{CE}$ 是否为定值?

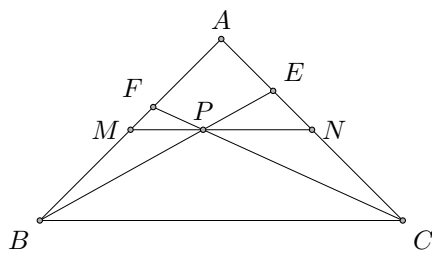


图 7.2.3



学以致用

习题 7.2.1

如图 7.2.4, $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, 点 P 是边 BC 上任一点, 过 P 作 BC 的垂线分别交直线 AB 、 AC 于点 E 、 F . 试问 $PE + PF$ 是否为定值?

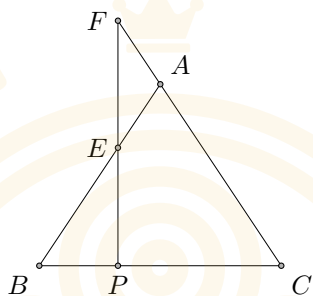


图 7.2.4

几何最值

知识概要

概要 7.3.1

几何最值问题是指当一个几何图形在特定规则下运动变化时, 寻找某个几何量 (如长度、面积) 的极端情况. 这类问题培养“优化”与“转化”的思维 (动态几何观念与极限思维、模型识别与策略选择能力、代数与几何的深度融合——函数思想), “追求极致”.

总之, 几何定值与几何最值这两类问题都是几何思维皇冠上的明珠. 它们共同培养学生的动态想象、模型识别、逻辑推理和数学建模等高阶思维能力. 解决这类问题带来的成就感, 能够极大地提升对数学之美的感知和探索未知世界的信心.

探究研讨

例题 7.3.1

如图 7.3.1, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $AC = 3$, $BC = 4$, P 为斜边 AB 上一动点, $PE \perp BC$ 于 E , $PF \perp AC$ 于 F , 则线段 EF 长的最小值为 _____.

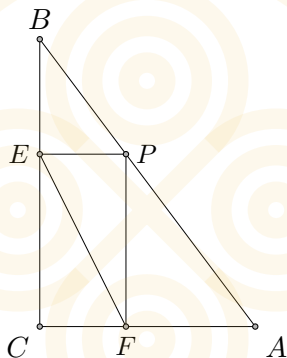


图 7.3.1

例题 7.3.2

如图 7.3.2, 设 $\angle MON = 20^\circ$, A 为 OM 上一点, $OA = 4\sqrt{3}$, D 为 ON 上一点, $OD = 8\sqrt{3}$, C 为 AM 上任意一点, B 是 OD 上任意一点, 则折线 $ABCD$ 的长 $AB + BC + CD$ 的最小值为 _____.

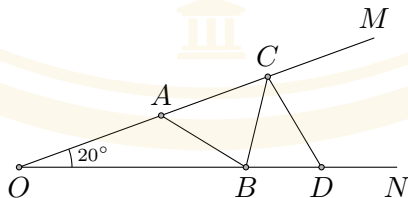


图 7.3.2

例题 7.3.3

如图 7.3.3, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 20$ cm, $BC = 10$ cm, 若在 AC 、 AB 上分别取一点 M 、 N , 使 $BM + MN$ 的值最小, 则这个最小值为 _____ cm.

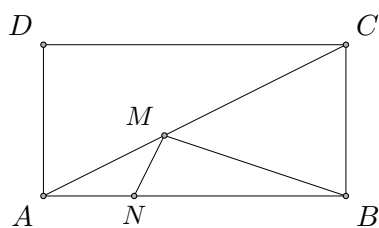


图 7.3.3

例题 7.3.4

如图 7.3.4, 在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中, $\angle A = 60^\circ$, M 是边 AD 的中点, N 是 AB 上一动点, 将 $\triangle AMN$ 沿 MN 所在直线翻折得到 $\triangle A'MN$, 连接 $A'C$, 则 $A'C$ 的最小值为 _____.

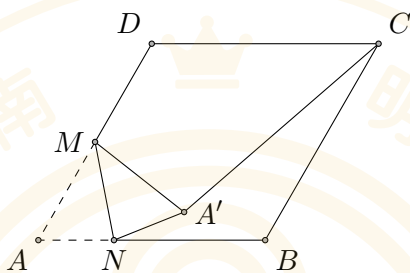


图 7.3.4

例题 7.3.5

如果恰有一个 $\triangle ABC$ 满足 $\angle ABC = 30^\circ$, $AC = 5$, $BC = a$, 那么 a 的取值范围是 _____.

**习题 7.3.1**

如图 7.3.5, 在平面直角坐标系内, 已知四个定点 $A(-3, 0)$, $B(1, -1)$, $C(0, 3)$, $D(-1, 3)$ 及一个动点 P , 则 $PA + PB + PC + PD$ 的最小值为 _____.

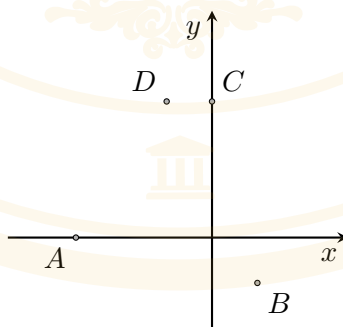


图 7.3.5

习题 7.3.2

如图 7.3.6, 点 P 为线段 AB (不含端点 A 、 B) 上的动点, 分别以 AP 、 PB 为斜边在 AB 的同侧作 $\text{Rt}\triangle AEP$ 与 $\text{Rt}\triangle PFB$, 且 $\angle AEP = \angle EPF = \angle PFB = 90^\circ$, 若 $AE + PF = 8$, $EP + FB = 6$, 则线段 EF 的取值范围是 _____.

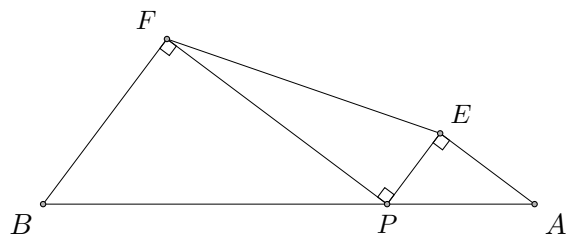


图 7.3.6

习题 7.3.3

如图 7.3.7, 已知 $AB = 10$, P 是线段 AB 上任意一点, 在 AB 的同侧分别以 AP 和 PB 为边作等边 $\triangle APC$ 和等边 $\triangle BPD$. 则 CD 长度的最小值是 ().

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) $5(\sqrt{5} - 1)$

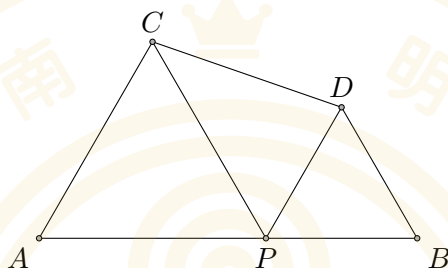


图 7.3.7

习题 7.3.4

如图 7.3.8, 在直角梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AB \perp BC$, $BC \parallel AD$, $AB = 6$, $BC = 5$, $AD = 3$, F 是以点 C 为圆心, 4 为半径的圆上一动点, E 为 AB 上一点. 当 $DE + EF$ 的值最小时, AE 的长为 _____.

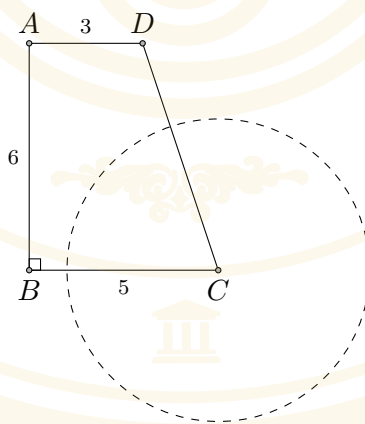


图 7.3.8

习题 7.3.5

如果满足 $\angle ABC = 60^\circ$, $AC = 12$, $BC = k$ 的 $\triangle ABC$ 恰有一个, 那么 k 的取值范围是 ().

- (A) $k = 8\sqrt{3}$ (B) $0 < k \leq 12$ (C) $k \geq 12$ (D) $0 < k \leq 12$ 或 $k = 8\sqrt{3}$

习题 7.3.6

如果恰有一个 $\triangle ABC$ 满足 $\angle ABC = 75^\circ$, $AC = 4$, $BC = a$, 那么 a 的取值范围是_____.

习题 7.3.7

同一平面内, 到 $\triangle ABC$ 三顶点距离之和最小的点——费马点 F .

当 $\triangle ABC$ 的最大角小于 120° 时, 费马点 F 关于三边 BC 、 CA 、 AB 的张角均为 120° ;

当 $\triangle ABC$ 的最大角不小于 120° 时, 费马点 F 即为最大角的顶点.



数论部分



整除与带余除法

导言

本章主要讲解整除、带余除法、奇数与偶数、算术基本定理、质数与合数、公约数与公倍数.



概要 8.1.1

我们知道两个整数的和、差、积仍然是整数,但是用一不等于零的整数去除另一个整数所得的商却不一定是整数.我们首先引进整除的概念.

1. 整除、约数、倍数的定义

设 a, b 是任意两个整数,其中 $b \neq 0$,如果存在一个整数 q 使得等式

$$a = bq \quad \text{①}$$

成立,我们就说 b 整除 a 或 a 被 b 整除,记作 $b \mid a$,此时我们把 b 叫作 a 的约数(因数),把 a 叫作 b 的倍数.

如果 ① 里的整数 q 不存在,我们就说 b 不能整除 a 或 a 不被 b 整除,记作 $b \nmid a$.

举例:我们知道对于整数 3、-15,存在整数 -5,使得 $-15 = 3 \times (-5)$.则称 -15 能被 3 整除(或称 3 能整除 -15).可以记作 $3 \mid -15$.

2. 恰好整除的定义

若 $a^t \mid b, a^{t+1} \nmid b$,其中 t 是自然数,则称 a^t 恰好整除 b .记作 $a^t \parallel b$.

举例:对于整数 40,有 $40 = 2^3 \times 5$,即有 $2^3 \mid 40, 2^4 \nmid 40$.则称 2^3 恰好整除 40.记作 $2^3 \parallel 40$.

另外,引入 n 的 p 进赋值的符号 $\nu_p(n)$,可记作 $\nu_2(40) = 3$.

3. 整除的性质

- (1) (传递性) 若 $a \mid b, b \mid c$,则 $a \mid c$.
- (2) 若 $b \mid a, d \mid c$,则 $bd \mid ac$.
- (3) 若 $b \mid a, c \mid a$,且 $\gcd(b, c) = 1$,则 $bc \mid a$.
- (4) 若 $a \mid b, a \mid c$,则对任意整数 x, y ,都有 $a \mid bx + cy$.
- (5) 若 $b \mid a, a \neq 0$,则 $1 \leq |b| \leq |a|$.
- (6) 若 p 是质数, k 是整数,且 $p \mid k^2$,则 $p^2 \mid k^2$.

我们以 (1)、(4) 的证明作为示范.

证明: (1) 由 $a \mid b, b \mid c$,知存在整数 x, y ,使得 $ax = b, by = c$.

所以 $axy = c$.而 xy 是整数,故 $a \mid c$.

(4) 由定义, 可设 $b = aq_1$, $c = aq_2$, 其中 q_1, q_2 都是整数, 则

$$bx + cy = aq_1x + aq_2y = a \cdot (q_1x + q_2y).$$

所以 $a \mid bx + cy$.

4. 整除的特征

- (1) 一个整数能被 2 (5) 整除的等价条件是这个数的末位数能被 2 (5) 整除.
- (2) 一个整数能被 4 (25) 整除的等价条件是这个数的末两位数能被 4 (25) 整除.
- (3) 一个整数能被 8 (125) 整除的等价条件是这个数的末三位数能被 8 (125) 整除.
- (4) 一个整数能被 3 (9) 整除的等价条件是这个数的各位数字之和能被 3 (9) 整除.
- (5) 一个整数能被 11 整除的等价条件是这个数的奇位数字之和与偶位数字之和的差能被 11 整除.
- (6) 一个整数能被 7 (11) [13] 整除的等价条件是这个数的末三位数与其前面数字构成的数之差能被 7 (11) [13] 整除.

我们以 (6) 的证明作为示范.

证明: 记至少四位数的正整数为

$$\begin{aligned}\overline{a_na_{n-1}\cdots a_3a_2a_1a_0} &= \overline{a_na_{n-1}\cdots a_3} \times 1000 + \overline{a_2a_1a_0} \\ &= 7 \times 11 \times 13 \times \overline{a_na_{n-1}\cdots a_3} + (\overline{a_2a_1a_0} - \overline{a_na_{n-1}\cdots a_3}),\end{aligned}$$

则 $7(11)[13] \mid \overline{a_na_{n-1}\cdots a_3a_2a_1a_0}$ 的等价条件是

$$7(11)[13] \mid (\overline{a_2a_1a_0} - \overline{a_na_{n-1}\cdots a_3}).$$

探究研讨

例题 8.1.1

一个四位数, 能被 111 整除, 且除得的商等于该四位数的各位数字之和, 则这个四位数为 _____.

例题 8.1.2

末八位恰是 18421997 并且能被 71 整除的最小自然数为 _____.

学以致用

习题 8.1.1

书店有单价为 10 分, 15 分, 25 分, 40 分的四种贺年片, 小华花了几张一元钱, 正好买了 30 张, 其中某两种各 5 张, 另两种各 10 张, 则小华买贺年片花去 _____ 元钱.

 带余除法

 知识概要

23 被 4 除, 商为 5, 余数为 3. 即 $23 \div 4 = 5 \cdots \cdots 3$. 还可写成 $23 = 4 \times 5 + 3$. 即

$$\text{被除数} = \text{除数} \times \text{商} + \text{余数}.$$

因为一般余数是小于除数的非负整数, 所以商与余数是唯一确定的.

这是因为商每增加或减少 1, 余数则减少或增加 1 个除数.

概要 8.2.1

我们知道

$$\text{被除数} = \text{除数} \times \text{商} + \text{余数}.$$

一般地, 我们有如下**带余除法定理**.

若 a, b 是两个整数, 其中 $b > 0$, 则存在着两个整数 q 及 r , 使得

$$a = bq + r, 0 \leq r < b \quad \textcircled{1}$$

成立, 而且 q 及 r 是惟一的.

证明: 作整数序列

$$\cdots, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, \cdots$$

则 a 必在上述序列的某两项之间, 即存在一个整数 q 使得

$$qb \leq a < (q+1)b$$

成立. 令 $a - qb = r$, 则 $a = bq + r$, 而 $0 \leq r < b$.

下面我们证明 q, r 的惟一性: 设 q_1, r_1 是满足 ① 的两个整数, 则

$$a = bq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < b,$$

因而 $bq_1 + r_1 = bq + r$, 于是 $b(q - q_1) = r_1 - r$, 故

$$b|q - q_1| = |r_1 - r|.$$

由于 r 及 r_1 都是小于 b 的正数, 所以上式右边是小于 b 的. 如果 $q \neq q_1$ 则上式左边 $\geq b$. 这是不可能的. 因此 $q = q_1$ 而 $r = r_1$.

注释: 带余除法可以简述如下:

设 b 是正整数, 对于任一整数 a , 存在唯一的一对整数 q, r 使得 $a = bq + r, 0 \leq r < b$.

 探究研讨

例题 8.2.1

对于 $i = 2, 3, \cdots, k$, 正整数 n 除以 i 所得的余数为 $i - 1$. 若 n 的最小值 n_0 满足 $2000 < n_0 < 3000$, 则正整数 k 的最小值为 _____.

例题 8.2.2

甲、乙、丙三个数分别是 312, 270, 211, 用自然数 $A (A > 1)$ 分别去除这三个数, 除甲所得的余数是除乙所得余数的 2 倍, 除乙所得的余数是除丙所得余数的 2 倍, 则这个自然数 $A =$ _____.



习题 8.2.1

2025 被两位的自然数去除, 可能得到的最大余数是 _____.

习题 8.2.2

用自然数 n 去除 63, 91, 130, 所得到的 3 个余数的和为 26, 则 $n =$ _____.

习题 8.2.3

已知 1059, 1417, 2312 分别被自然数 x 除时, 所得的余数都是 y ($y \neq 0$), 则 $x - y =$ _____.

习题 8.2.4

除以 8 和 9 都余 1 的所有三位数的和是 ().

(A) 6492 (B) 6565 (C) 7501 (D) 7514

习题 8.2.5

若正整数 x 除以 11 的商是 a , 余数是 b , 除以 12 的余数是 c , 且 $a + c = 17$, 则 $b =$ _____.

习题 8.2.6

(1) 正整数 N 分别除以 3, 6, 9 所得的三个余数之和为 15, 则它除以 18 所得的余数为 _____.

(2) 正整数 N 分别除以 5, 10, 15 所得的三个余数之和为 27, 则它除以 30 所得的余数为 _____.

奇数与偶数

知识概要

定义 8.3.1 (奇数, 偶数)

若一个整数能被 2 整除, 则称之为偶数; 若一个整数被 2 除余 1, 则称之为奇数.

$$\text{偶数} \begin{cases} \text{正偶数: } 2, 4, 6, 8, 10, \dots, \\ \text{零: } 0, \\ \text{负偶数: } -2, -4, -6, -8, -10, \dots \end{cases} \quad \text{奇数} \begin{cases} \text{正奇数: } 1, 3, 5, 7, 9, \dots, \\ \text{负奇数: } -1, -3, -5, -7, -9, \dots \end{cases}$$

性质 8.3.1 (奇偶性)

我们用 $k \in \mathbb{Z}$ 表示 k 是整数, $m \in \mathbb{N}$ 表示 m 是自然数, $t \in \mathbb{Z}_+$, $t \in \mathbb{N}^*$ 或 $t \in \mathbb{N}_+$ 表示 t 是正整数. 偶数可用 $2k$ (k 是整数) 表示, 奇数可用 $2k+1$ (k 是整数) 表示.

- (1) 奇数 $\neq$ 偶数.
- (2) 两个整数的和与差有相同的奇偶性. 即若 $a, b \in \mathbb{Z}$, 则 $a+b$ 与 $a-b$ 奇偶性相同.
- (3) 两个整数相加, 若加数奇偶性相同, 则和是偶数; 若加数奇偶性不同, 则和是奇数.
- (4) 两个整数相乘, 若乘数中有偶数, 则积是偶数; 若乘数都是奇数, 则积是奇数.
- (5) 当 n 为偶数时, $(-1)^n = 1$; 当 n 为奇数时, $(-1)^n = -1$.
- (6) 若 $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, 则 k 与 $-k, |k|, k^n$ 的奇偶性都相同.
- (7) 奇数个奇数的和是奇数, 偶数个奇数的和是偶数, 任意多个偶数的和是偶数.

若干个整数之和为奇数等价于其中奇数有奇数个;

若干个整数之和为偶数等价于其中奇数有偶数个.

总之, 若干个整数相加, 和的奇偶性与加数中含奇数的个数的奇偶性相同.

- (8) 含有偶数的若干个整数的积是偶数, 任意多个奇数的积是奇数.

若干个整数之积为奇数等价于其中每个因数都为奇数;

若干个整数之积为偶数等价于其中至少有一个因数为偶数.

总之, 若干个整数相乘, 积的奇偶性与因数中含偶数的真值的奇偶性相反.

注释: 我们研究积的奇偶性时, 可用和的奇偶性去分析每个加数的奇偶性情况; 研究和的奇偶性时, 可用积的奇偶性去分析每个因数的奇偶性情况.

探究研究

例题 8.3.1

在每一局象棋比赛中, 赢者得 1 分, 平局各得 0 分, 输者扣 1 分. 若干个学生进行象棋比赛, 每两人比赛一局. 结果发现, 有一人共得 7 分, 另一人共得 20 分. 试问在比赛过程中是否一定出现过平局?

例题 8.3.2

已知 a, b, c 三个数中有两个奇数, 一个偶数, n 是整数, 如果

$$s = (a + n + 1)(b + 2n + 2)(c + 3n + 3),$$

那么 ().

(A) s 是偶数

(B) s 是奇数

(C) s 的奇偶性与 n 的奇偶性相同

(D) s 的奇偶性不能确定

例题 8.3.3

设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为 $+1$ 或 -1 , 并且

$$x_1 x_2 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 x_5 + x_3 x_4 x_5 x_6 + \dots + x_{n-2} x_{n-1} x_n x_1 + x_{n-1} x_n x_1 x_2 + x_n x_1 x_2 x_3 = 0.$$

证明: n 能被 4 整除.

例题 8.3.4

能否把 $1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots, 1986, 1986$ 排成一行, 使得两个 1 之间夹 1 个数, 两个 2 之间夹 2 个数, $\dots$, 两个 1986 之间夹 1986 个数? 请证明你的结论.



习题 8.3.1

设线段 AB 的两个端点中, 一个是红点, 一个是绿点, 在线段中插入 n 个分点, 将各个分点随意地涂上红色或绿色. 线段 AB 分成的 $n+1$ 个不重叠的小线段, 如果这些小线段的两个端点一个为红点而另一个为绿点, 则称它为标准线段. 试确定标准线段的条数的奇偶性.

习题 8.3.2

将连续自然数 $1, 2, 3, \dots, n (n \geq 3)$ 的排列顺序打乱, 重新排成 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 若

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2)(a_3 - 3) \cdots (a_n - n)$$

恰为奇数, 则 n ().

(A) 一定是偶数

(B) 一定是奇数

(C) 可能是奇数, 也可能是偶数

(D) 一定是 $2^m - 1$ (m 是奇数)

习题 8.3.3

n 个整数之积为 n , 和为 0. 求证: $4 \mid n$.

习题 8.3.4

在 6 张卡片的正面分别写上整数 $1, 2, 3, 4, 5, 6$, 打乱次序后, 将卡片翻过来, 在它们的反面也随意分别写上这 6 个数, 然后计算每张卡片正面与反面所写数之差的绝对值, 得到 6 个数. 求证: 所得的 6 个数中至少有两个是相同的.

算术基本定理

知识概要

概要 8.4.1 (算术基本定理)

1. **算术基本定理:** 每一个大于 1 的整数都能分解成质因数连乘积的形式, 且如果把这些质因数按照由小到大的顺序排列 (相同因数的乘积写成幂的形式), 这种分解方法是唯一的. 具体地说, 任何一个大于 1 的整数 n , 在不计各因数的顺序的情况下, 都能唯一表示成它的质因数之积. 即有 $n = p_1 p_2 \cdots p_m$, 其中 $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_m$ ($i = 1, 2, \cdots, m$) 为质数. 将相同质因数的积用幂的形式表示为

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k},$$

其中 $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, p_i ($i = 1, 2, \cdots, k$) 为质数, α_i ($i = 1, 2, \cdots, k$) 都是正整数 (有时允许 $\alpha_i = 0$). 我们称此表达式为 n 的**标准分解式**.

2. **质数的判定.**

若不大于 $\sqrt{a}$ 的所有质数均不为 a 的约数, 则 a 为质数.

设合数 a 的除 1 以外的最小正约数为 p , 则 p 是质数且 $p \leq \sqrt{a}$.

3. **正约数的个数.**

记正整数 n 的所有正约数的个数为 $d(n)$.

设整数 $n (> 1)$ 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, 则

$$d(n) = (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) \cdots (1 + \alpha_k).$$

4. **正约数和.**

记正整数 n 的所有正约数的和为 $\sigma(n)$.

设整数 $n (> 1)$ 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, 则

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= (1 + p_1 + \cdots + p_1^{\alpha_1}) \cdots (1 + p_k + \cdots + p_k^{\alpha_k}) \\ &= \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}. \end{aligned}$$

5. **正约数的倒数和.**

设整数 $n (> 1)$ 的标准分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, 则其所有正约数的倒数和为

$$\frac{(1 + p_1 + \cdots + p_1^{\alpha_1}) \cdots (1 + p_k + \cdots + p_k^{\alpha_k})}{n}.$$

6. **完全平方数的性质与判定.**

对任意的正整数 n , 当且仅当 $d(n)$ 为奇数时, n 为完全平方数.

7. **$d(n)$ 的积性.**

若正整数 m, n 满足 $\gcd(m, n) = 1$, 则 $d(mn) = d(m) \cdot d(n)$.

8. **质因子的分配.**

设正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足质数 $p \mid a_1 a_2 \cdots a_n$, 则必存在 $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 有 $p \mid a_i$.

9. 勒让德公式.

记正整数 n 的标准分解式中质数 p 的幂次为 $\nu_p(n)$, 则 $n!$ 中质数 p 的幂次为

$$\nu_p(n!) = \sum_{r=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^r} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \cdots.$$

其中符号 $\lfloor x \rfloor$ 表示不超过 x 的最大整数.

 探究研讨

例题 8.4.1

已知整数 $x > 7$, 且 $\frac{2025}{x-7}$ 是整数, 则满足条件的所有整数 x 之和为 _____.

例题 8.4.2

已知正整数 n 有 12 个正约数, n 的不同质因子个数的最大值为 M , n 的最小值为 m , 则 $M + m =$ _____.

例题 8.4.3

对任意正整数 k , 记 g_k 为 k 的最大奇因子, 例如 $g_8 = 1, g_9 = 9, g_{10} = 5$.
则 $g_1 + g_2 + g_3 + \cdots + g_{512} =$ _____.

 学以致用

习题 8.4.1

用 $d(n)$ 表示正整数 n 的正约数的个数, 则当 n 取 $1 \sim 2025$ 中的所有 5 的倍数时, 所有 $d(n)$ 的和 $d(5) + d(10) + \cdots + d(2025)$ 是 _____ 数 (填“奇”或“偶”).

习题 8.4.2

已知 x 是整数, 且 $\frac{600}{5-x}$ 也是整数, 则这样的整数 x 有 _____ 个, 这样的整数 x 的和为 _____.

习题 8.4.3

180 的正约数有 _____ 个, 所有正约数的倒数和为 _____.

习题 8.4.4

正整数 n 恰有 12 个正约数, 记作 $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_{12} = n$.
已知 $d_{d_4-1} = (d_1 + d_2 + d_4) d_8$, 则 $n =$ _____.

习题 8.4.5

对于正整数 k , $g(k)$ 表示 k 的最大奇因数 (如 $g(60) = 15$). 则 $g(1) + g(2) + \cdots + g(2019)$ 除以 10 的余数为 _____.

质数与合数

知识概要

定义 8.5.1 (质数, 合数)

一个大于 1 的整数, 如果只有 1 和它本身作为它的正约数 (即正因数), 这样的正整数叫做**质数** (也叫**素数**); 如果除了 1 和它本身之外还有其他的正约数, 这样的正整数叫做**合数**.

注释: 这就是说, 只有 1 和其本身共两个正因数的正整数是**质数** (或**素数**), 而正因数多于两个的正整数是**合数**. 1 既不是质数也不是合数.

将全体正整数分为三类: $\begin{cases} \text{正整数 } 1, \\ \text{质数,} \\ \text{合数.} \end{cases}$ 即正整数集 $\mathbb{Z}_+ = \{1\} \cup \{\text{质数}\} \cup \{\text{合数}\}$.

性质 8.5.1

- (1) 如果两个质数的和或差是奇数, 那么其中必有一个是 2.
- (2) 如果两个质数的积是偶数, 那么其中必有一个是 2.

性质 8.5.2

- (1) 若整数 a, b , 质数 p 满足 $p \mid ab$, 则 $p \mid a$ 或 $p \mid b$.
- (2) 若正整数 a, b , 质数 p 满足 $p = ab$, 则一定有 $p = a$ 或 $p = b$.
- (3) 若 p 是质数, 则对任一正整数 a , 或者 $p \mid a$, 或者 $\gcd(p, a) = 1$.

定理 8.5.1

大于 1 的整数的所有真约数 (不包含自身的所有正约数) 中, 大于 1 的最小的正约数一定是质数.

注释: 质数的常用判定方法:

- (1) 查表法: 通过查质数表, 获知一个正整数是否是质数.
- (2) 埃氏筛法: 对于 $a \in \mathbb{N}^*$, 用不超过 $\sqrt{a}$ 的全部质数逐一试除, 若均不能整除 a , 则 a 为质数.

埃拉托斯特尼筛法, 简称**埃氏筛法**, 是一种由希腊数学家埃拉托斯特尼所提出的一种简单判定素数的算法. 要得到自然数 n 以内的全部素数, 必须把不大于 $\sqrt{n}$ 的所有素数的倍数剔除, 剩下的就是素数.

定理 8.5.2

质数有无穷多个.

探究研讨

例题 8.5.1

判断 269, 437 两个数是合数还是质数?

例题 8.5.2

证明: 每一个大于 11 的自然数都是两个合数的和.

例题 8.5.3

正整数 a, b 满足 $a > b > 1$, 且 b 是 a 除自身外最大的约数.
求证: $a + b$ 不是 2 的正整数次幂.

例题 8.5.4

若从 $1, 2, \dots, 2025$ 中任意取出 n 个两两互质的数中, 都至少有一个质数, 试求 n 的最小可能值.

**习题 8.5.1**

是否存在连续 88 个自然数都是合数? 若存在, 请举一例; 若不存在, 请说明理由.

习题 8.5.2

由 1 到 10 这十个自然数按某个次序写成一排, 记为 $a_1, a_2, \dots, a_{10}$, 用 S_n 表示前 n 个数的和, 即 $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$.

(1) 这十个数不管按怎样的次序排列, S_{10} 是不是一个确定的值? 如果不是, 请说明理由; 如果是, 请求出这个值.

(2) 在 $S_1, S_2, \dots, S_{10}$ 中, 最多有多少个偶数? 最少有多少个偶数?

(3) 在 $S_1, S_2, \dots, S_{10}$ 中, 最多有多少个质数? 请举一个例子.

习题 8.5.3

把一个两位质数写在另一个与它不同的两位质数的后面, 得到一个四位数, 已知这个四位数恰能被这两个质数和的一半整除, 试求出所有这样的四位数.

 公约数与公倍数

 知识概要
定义 8.6.1 (公约数)

若 $c \mid a_1, c \mid a_2, \dots, c \mid a_n$, 则 c 称为 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的公约数.

定义 8.6.2 (最大公约数)

$a_1, a_2, \dots, a_n$ 的所有公约数中最大的一个称为 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的最大公约数.
记作 $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

定义 8.6.3 (互素)

若 $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$, 就叫做 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 互质 (也叫做互素).
这 n 个数叫互质数 (互素数).

结论 8.6.1

- (1) 1 和任何整数互质; 相邻两个整数互质; 相邻两个奇数互质.
- (2) 对质数 p , 若 p 不能整除 a , 则 p 与 a 互质.
- (3) 若 $\gcd(a, b) = 1$, 则 $\gcd(a \pm b, a) = 1, \gcd(a \pm b, ab) = 1$.
- (4) 若 $\gcd(a, b) = 1, a \mid bc$, 则 $a \mid c$.
- (5) 若 $a \mid c, b \mid c, \gcd(a, b) = 1$, 则 $ab \mid c$.
- (6) 若 $\gcd(a, b) = 1$, 则 $\gcd(b, ac) = \gcd(b, c)$.
- (7) 若 $\gcd(a, b) = 1, c \mid a$, 则 $\gcd(c, b) = 1$.
- (8) 若 $\gcd(a, b) = 1$, 则 $\gcd(a, b^k) = 1$.
- (9) 若 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 中的每一个与 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 中的每一个互质, 则

$$\gcd(a_1 a_2 \cdots a_m, b_1 b_2 \cdots b_n) = 1.$$

定理 8.6.1

若 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的标准分解式为 $a_1 = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}, a_2 = \prod_{i=1}^m p_i^{\beta_i}, \dots, a_n = \prod_{i=1}^m p_i^{\delta_i}$, 其中 p_i 为质数, $\alpha_i, \beta_i, \dots, \delta_i$ 为非负整数, $i = 1, 2, \dots, m$, 则 $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^m p_i^{t_i}$, 其中 $t_i = \min\{\alpha_i, \beta_i, \dots, \delta_i\}$.

定理 8.6.2

如果 a 是 b 的倍数, 那么 a 和 b 的公约数的集合与 b 的约数集合相等.

定理 8.6.3

如果 a 是 b 的倍数, 则 $\gcd(a, b) = b$.

定理 8.6.4

设 a 和 b 是不同时等于 1 的正整数, 且 $d = ax_0 + by_0$ 是形如 $ax + by$ (x, y 是整数) 的整数中的最小正整数, 则 $d = \gcd(a, b)$.

定理 8.6.5

正整数 a 和 b 的公约数集合与它们的最大公约数的约数集合相等.

定理 8.6.6

设 m 是任意正整数, 则 $\gcd(am, bm) = \gcd(a, b) \cdot m$.

定理 8.6.7

设 n 是 a 和 b 的一个公约数, 则 $\gcd\left(\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right) = \frac{\gcd(a, b)}{n}$.

定理 8.6.8

$\gcd(a, b) = \gcd(a - b, b)$.

定理 8.6.9

设正整数 a 和 b ($a > b$) 满足等式 $a = bq + r$, $0 \leq r < b$, $q, r \in \mathbb{Z}$, 则 $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$.

定义 8.6.4 (公倍数, 最小公倍数)

若 $a_1 \mid b$, $a_2 \mid b$, $\dots$, $a_n \mid b$, 则 b 称为 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的公倍数. $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的所有公倍数中最小的一个称为 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的最小公倍数. 记作 $[a_1, a_2, \dots, a_n]$.

定理 8.6.10

若 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的标准分解式为 $a_1 = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i}$, $a_2 = \prod_{i=1}^m p_i^{\beta_i}$, $\dots$, $a_n = \prod_{i=1}^m p_i^{\delta_i}$, 其中 p_i 为质数, $\alpha_i, \beta_i, \dots, \delta_i$ 为非负整数, $i = 1, 2, \dots, m$, 则 $[a_1, a_2, \dots, a_n] = \prod_{i=1}^m p_i^{r_i}$, 其中 $r_i = \max\{\alpha_i, \beta_i, \dots, \delta_i\}$.

定理 8.6.11

$a_1, a_2, \dots, a_n$ 的最小公倍数是它们的任一公倍数的约数.

定理 8.6.12

$$\text{lcm}(a, b) = \frac{ab}{\gcd(a, b)}.$$

 探究研讨**例题 8.6.1**

对于任意 $n \geq 1$, 定义 $a_n = 1000 + n^2$, 若 d_n 为 a_n 和 a_{n+1} 的最大公约数, $n = 1, 2, \dots$, 试求 d_n 的最大值.



习题 8.6.1

设 k, a, b 为正整数, k 被 a^2, b^2 整除所得的商分别为 $m, m + 116$.

- (1) 若 a, b 互质, 证明 $a^2 - b^2$ 与 a^2, b^2 都互质;
- (2) 当 a, b 互质时, 求 k 的值;
- (3) 若 a, b 的最大公约数为 5, 求 k 的值.



同余与同余类

引言

本章主要讲解同余与同余类、不定方程、费马小定理.

同余与同余类

知识概要

我们知道 103 与 7 被 4 除的结果: $103 \div 4 = 25 \cdots 3$, $7 \div 4 = 1 \cdots 3$.

象这样, 整数 103 与 7 被相同的正整数 4 除所得的余数也相同, 我们称 103 与 7 关于模 4 同余. 具体地, 由 103 模 4 余 3, 7 模 4 余 3, 知 103 与 7 关于模 4 同余.

概要 9.1.1 (同余)

1. 同余的定义.

设 m 为正整数, 若整数 a 和 b 被 m 除的余数相同, 即 a, b 的差 $a - b$ 被 m 整除, 即 $a - b = km$ (k 是整数), 则称 a 和 b 对模 m 同余, 简称同余. 记作 $a \equiv b \pmod{m}$.

同余的三种表达形式:

- (1) 文字描述: a 与 b 对模 m 同余.
- (2) 同余符号: $a \equiv b \pmod{m}$.
- (3) 整除符号: $m \mid (a - b)$.

2. 同余的性质.

- (1) (反身性) $a \equiv a \pmod{m}$.
- (2) (对称性) 若 $a \equiv b \pmod{m}$, 则 $b \equiv a \pmod{m}$.
- (3) (传递性) 若 $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$, 则 $a \equiv c \pmod{m}$.
- (4) (同余的可加性, 可减性, 可乘性) 若 $a \equiv b \pmod{m}$, $c \equiv d \pmod{m}$, 则

$$a + c \equiv b + d \pmod{m}, \quad a - c \equiv b - d \pmod{m}, \quad a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}.$$

下面给出 (4) 的证明.

证明: 运用带余除法. 由已知, 可设

$$a = q_1m + r, \quad b = q_2m + r, \quad c = q_3m + r', \quad d = q_4m + r',$$

则

$$a + c = q_1m + r + q_3m + r' \equiv r + r' \pmod{m}.$$

$$a - c = q_1m + r - q_3m - r' \equiv r - r' \pmod{m}.$$

$$a \cdot c = (q_1m + r)(q_3m + r') = q_1q_3m^2 + q_1mr' + q_3mr + rr' \equiv rr' \pmod{m}.$$

同理

$$b + d \equiv r + r' \pmod{m}, \quad b - d \equiv r - r' \pmod{m}, \quad b \cdot d \equiv rr' \pmod{m}.$$

由同余的传递性, 知

$$a + c \equiv b + d \pmod{m},$$

$$a - c \equiv b - d \pmod{m},$$

$$a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}.$$

3. 常用结论.

(1) 任意一个正整数与其数字和模 3 同余, 模 9 也同余.

(2) 完全平方数模 3 余 0 或 1; 完全平方数模 5 余 0, 1 或 4; 完全平方数模 8 余 0, 1 或 4; 完全立方数模 9 余 0, 1 或 8; 整数四次幂模 16 余 0 或 1.

证明: 我们利用同余的性质证明.

(1) 设这个正整数为 $\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$, 则

$$\begin{aligned} \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0} &= a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 \\ &\equiv a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \pmod{9}. \end{aligned}$$

(2) 因为 $x \equiv 0, \pm 1 \pmod{3}$, 所以 $x^2 \equiv 0, 1 \pmod{3}$.

因为 $x \equiv 0, \pm 1, \pm 2 \pmod{5}$, 所以 $x^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$.

因为 $x \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, 4 \pmod{8}$, 所以 $x^2 \equiv 0, 1, 4, 9, 16 \equiv 0, 1, 4 \pmod{8}$.

因为 $x \equiv 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4 \pmod{9}$, 所以 $x^3 \equiv 0, 1, 8, 27, 64 \equiv 0, 1, 8 \pmod{9}$.

当 $x \equiv 0 \pmod{2}$ 时, $x^4 \equiv 0 \pmod{16}$;

当 $x \equiv 1 \pmod{2}$ 时, $x^2 \equiv 1 \pmod{8} \equiv 1, 9 \pmod{16} \implies x^4 \equiv 1 \pmod{16}$.

概要 9.1.2 (同余类)

将所有整数按模正整数 $m (m > 1)$ 来分类: 若 a, b 模 m 同余, 则 a 与 b 属于同一类, 否则不属于同一类. 这样得到 m 个类.

由模 m 同余的所有整数构成模 m 的一个同余类 (剩余类).



探究研讨

例题 9.1.1

70 个数排成一行, 除了两头的两个数外, 每个数的 3 倍都恰好等于它左右两个数的和, 这一行最左边的几个数是这样的: 0, 1, 3, 8, 21, $\dots$. 问最右边的一个数被 6 除余几?

例题 9.1.2

- (1) 求 2^{1000} 除以 13 的余数;
- (2) 求 10^n 模 6 的余数, 其中 n 是正整数;
- (3) 求 $10^{10^{10}}$ 模 7 的余数.

例题 9.1.3

$1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + 2024^{2024}$ 除以 8 的余数为 _____.

例题 9.1.4

求所有正整数 m, n , 使得 $\underbrace{33\cdots 3}_{m\text{个}3}\underbrace{66\cdots 6}_{n\text{个}6}$ 是完全平方数.

例题 9.1.5

设正整数 m , 求证: 必有一个正整数是 m 的倍数, 且其所有的数字均为 0 或 1.



学以致用

习题 9.1.1

甲、乙在玩一种纸牌, 纸牌共有 40 张, 每张纸牌上有 1 至 10 中的一个数, 每个数有四种不同的花色. 开始时, 每人有 20 张牌, 每人将牌放在桌子上, 将各自牌中能够组成和为 15 的牌拿掉, 最后乙还剩两张牌, 牌上的数分别为 5 和 3, 甲也剩两张牌, 其中一张牌上的数为 9. 则甲的另一张牌上的数是 _____.

习题 9.1.2

求所有的正整数 n , 使得 $1\underbrace{77\cdots 7}_{n\text{个}7}$ 与 $3\underbrace{77\cdots 7}_{n\text{个}7}$ 都是素数.

习题 9.1.3

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 为整数, 对于任意正整数 n 均有 $a_n = (n-1) \left[\left(\frac{a_2}{2} - 1 \right) n + 2 \right]$, 若 $200 \mid a_{199}$, 求最小的正整数 $n > 1$, 使得 $200 \mid a_n$.

习题 9.1.4

已知三位数 $\overline{abc}$, 其平方数的末三位数也是 $\overline{abc}$. 则满足条件的所有三位数的和为 _____.

习题 9.1.5

- (1) 能否找到自然数 a, b , 使 $a^2 = 2026 + b^2$?
- (2) 求证: 2026 不能表示成任意多个连续奇数之和.

 不定方程

 知识概要

概要 9.2.1 (不定方程)

1. 一次不定方程.

设 a, b, c, d 为整数, 则一次不定方程 $ax + by = c$ 有:

(1) 若 $\gcd(a, b) = d$, 且 d 不能整除 c , 则不定方程 $ax + by = c$ 没有整数解.

(2) 若 (x_0, y_0) 是 $ax + by = c$ 的一个整数解 (称为特解), 则

$$\begin{cases} x = x_0 + bt, \\ y = y_0 - at \end{cases} \quad (t \text{ 为整数})$$

是方程的全部整数解 (称为通解). 其中 $\gcd(a, b) = d$, 且 d 能整除 c .

(3) 若 (x_0, y_0) 是 $ax + by = 1$ ($\gcd(a, b) = 1$) 的特解, 则 (cx_0, cy_0) 是方程 $ax + by = c$ 的一个特解.

2. 一次不定方程的解法.

求整系数不定方程 $ax + by = c$ 的正整数解, 通常有以下步骤:

(1) 判断有无整数解;

(2) 求出一个特解;

(3) 写出通解;

(4) 有整数 t 同时要满足的条件 (不等式组), 代入定理中的表达式, 写出不定方程的正整数解.

解不定方程, 需要依据方程的特点, 并灵活运用相关知识和方法.

我们主要讲解结合同余及整除的知识解一次不定方程的方法.

 探究研讨

例题 9.2.1

求方程 $6x + 22y = 90$ 的自然数解.

例题 9.2.2

设正整数 m 不超过 720. 一个标准时钟在 $0:00$ 后的第 m 分钟, 时针与分针的夹角恰好是 1° . 则所有可能的 m 的值为 _____.

 学以致用

习题 9.2.1

保罗和詹妮各自有整数英镑.

保罗对詹妮说: “如果你给我 3 英镑, 我将有你的 n 倍”.

詹妮对保罗说: “如果你给我 n 英镑, 我将有你的 3 倍”.

假设他们的陈述都是正确的, 并且 n 是正整数, 则 n 的所有可能值为 _____.

费马小定理

知识概要

概要 9.3.1 (完全剩余系)

在模 m 的 m 个剩余类中各取一个整数构成模 m 的完全剩余系. 简称完系.
 绝对值不超过 $\left[\frac{m}{2}\right]$ 的模 m 的完系称为模 m 的绝对最小完系.
 将 $0, 1, 2, \dots, m-1$ 称为模 m 的最小非负完系.

概要 9.3.2 (费马小定理)

若 a 为整数, p 为质数, 则 $a^p \equiv a \pmod{p}$.

进一步, $a^{p-1} \equiv \begin{cases} 0 \pmod{p}, & p \mid a, \\ 1 \pmod{p}, & p \nmid a. \end{cases}$

证明: 构造完系.

情形一: 若 $\gcd(a, p) \neq 1$, 则 $p \mid a$. 从而 $a^p \equiv a \equiv 0 \pmod{p}$, $a^{p-1} \equiv 0 \pmod{p}$.

情形二: 若 $\gcd(a, p) = 1$. 因为 p 是质数, 所以 $0, 1, \dots, p-1$ 是模 p 的一个完系.
 而 $\gcd(a, p) = 1$, 则 $0, a, \dots, (p-1)a$ 也是模 p 的一个完系.
 否则必有同余, 设为 $p \mid a(i-j)$, 其中 $0 \leq i < j \leq p-1$, 则 $p \mid (i-j)$. 这与 $0, 1, \dots, p-1$ 是模 p 的一个完系矛盾.

从而 $a, 2a, \dots, (p-1)a$ 模 p 的余数是 $1, 2, \dots, p-1$ 的一个排列. 所以

$$a \cdot 2a \cdots (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdots (p-1) \pmod{p}.$$

$$a^{p-1} \cdot (p-1)! \equiv (p-1)! \pmod{p}.$$

又因 p 是质数, 故 $\gcd(p, 1 \cdot 2 \cdots (p-1)) = 1$.

因此 $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. 从而 $a^p \equiv a \pmod{p}$.

探究研讨

例题 9.3.1

所有满足 $p \mid 2^{p-2} + 100$ 的质数 p 之和为 _____.

例题 9.3.2

求所有的素数 p , 使得 $\frac{2^{p^3+11} - 1}{p}$ 为整数.

例题 9.3.3

设 $S = \underbrace{111 \cdots 1}_{19 \text{ 个 } 1} \underbrace{999 \cdots 9}_{19 \text{ 个 } 9}$. 求证: $2S$ 位数

$$\underbrace{111 \cdots 1}_{S \text{ 个 } 1} \underbrace{999 \cdots 9}_{S \text{ 个 } 9}$$

是 19 的倍数.

**习题 9.3.1**

若质数 p 满足 $p \mid 2^p + 999$, 则 p 的最大值为 _____.

习题 9.3.2

所有满足 $p \mid 2^{p-1} + 921$ 的质数 p 的平均数为 _____.



进位制与高斯函数

导言

本章主要讲解进位制与高斯函数.

 进位制

 知识概要

概要 10.1.1

位值制记数法, k 进制

我们最常用的是 10 进制记数法, 是使用 10 个阿拉伯数字 $0 \sim 9$ 表示的, 且满 10 进 1. 比如 10 进制数

下面划线部分表示相应数字的位值

$$2025 = 2 \times \underline{10^3} + 0 \times \underline{10^2} + 2 \times \underline{10^1} + 5 \times \underline{10^0}.$$

进位制问题大多涉及到等比数列求和、计数原理及组合数等知识, 属于一类综合问题.

位值制记数法是一种记数方法. 每个数码所表示的数值, 不仅取决于这个数码本身, 而且取决于它在记数中所处的位置. 当可使用数字符号的数目为 k 时, 则称为 **k 进制**.

在 16 进制中有 16 个数字 $0-9$ 和 $A-F$, 其中 $A-F$ 依次表示数 $10-15$.

例如, 用位值制记数法表示的 16 进制数

$$171B = 1 \times 16^3 + 7 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + B \times 16^0 = 5915.$$

这里字符 B 表示数 11. 等号右边计算出的数值表示的就是 10 进制数. 所以我们将 10 进制数 5915 用 16 进制数记为

$$(171B)_{16}.$$

一般地, k 进制数由值为 $0 \sim k-1$ 的 k 个数字符号结合各自的位值所得.

对于任何一个数, 可用不同的进位制来表示. 比如, $(57)_{10}$ 可以用 5 进制表示为

$$\begin{aligned} (57)_{10} &= 5 \times 11 + 2 \\ &= 5 \times (5 \times 2 + 1) + 2 \\ &= 5^2 \times 2 + 5 \times 1 + 2 \\ &= (212)_5. \end{aligned}$$

可以用 8 进制表示为

$$(57)_{10} = 8 \times 7 + 1 = (71)_8,$$

也可以用 16 进制表示为

$$(57)_{10} = 16 \times 3 + 9 = (39)_{16}.$$

我们可以简化步骤. 还可用竖式来计算.

在没有特别注明几进制的问题中, 均指 10 进制表示的数.

另外, 对于小数的情形与整数类似.

我们将在例题中作更加详细的说明.

 探究研讨
例题 10.1.1

将 10 进制数 2025 化为 6 进制表示为 _____.

例题 10.1.2

- (1) 将 $(246)_7$ 化为 5 进制表示为 _____.
- (2) 将 $(357)_8$ 化为 2 进制表示为 _____.

例题 10.1.3

- (1) 已知正整数 a, b, x, y 满足 $a > b, x > y$, 且 $2^a + 2^b = 2^x + 2^y$. 求证: $x = a, y = b$.
- (2) 设整数 R, x, y, z 满足 $R > x > y > z$, 且 $16(2^R + 2^x + 2^y + 2^z) = 330$. 则 R 的值为 _____.

例题 10.1.4

15 转化成 2 进制是 _____, 10 位的 2 进制数有 _____ 个.

例题 10.1.5

将 $(7.15)_{10}$ 化为 2 进制表示为 _____.

例题 10.1.6

十进制数 2025^7 化为七进制数后的末位数字是 _____, 末两位数字是 _____.

例题 10.1.7

是否存在一个 25 的倍数, 其二进制表达式恰有 25 个 0, 25 个 1? 如果存在, 请写出一个满足要求的二进制数; 如果不存在, 请说明理由.

 学以致用
习题 10.1.1

将 $(2013)_{10}$ 化为 8 进制表示为 _____.

习题 10.1.2

将 $(2018)_9$ 化为 4 进制表示为 _____.

习题 10.1.3

将 $(312)_4$ 化为 8 进制表示为 _____.

习题 10.1.4

将 $(13.25)_6$ 化为 10 进制为 _____, 将 $(13.25)_{10}$ 化为 8 进制为 _____.

习题 10.1.5

已知 x, y, z 是整数, 且 $x > y > z, 2^x + 2^y + 2^z = 4.625$, 则 xyz 的值为 _____.

习题 10.1.6

已知 $x_1, x_2, \dots, x_k$ 都是整数, 且 $x_1 > x_2 > \dots > x_k$, $2^{x_1} + 2^{x_2} + \dots + 2^{x_k} = \frac{75}{128}$. 则 $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ 的值为 _____.

习题 10.1.7

设正整数 $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ ($n \in \mathbb{N}_+$), 且 $2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_n} = 2012$, 则 $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ 的最小值为 _____.

习题 10.1.8

十进制数 $47^{37^{27}}$ 化为七进制后的末位数字是 _____, 末两位数字是 _____.

习题 10.1.9

证明存在一个 2004 的倍数, 其二进制表达式恰有 2004 个 0, 2004 个 1.

习题 10.1.10

证明存在一个 2011 的倍数, 其二进制表达式恰有 2011 个 0, 2011 个 1.

 高斯函数

 知识概要

概要 10.2.1

1. 高斯函数的定义

(1) 设 $x \in \mathbb{R}$, 用 $[x]$ 表示 x 的整数部分, 即不超过 x 的最大整数, 则 $[x]$ 称为 x 的高斯函数 (取整函数).

用 $\{x\} = x - [x]$ 表示 x 的小数部分, 则

$$0 \leq \{x\} < 1.$$

(2) 不大于 x 的最大整数记为 $[x]$, 称为地板函数. 即高斯函数.

不小于 x 的最小整数记为 $\lceil x \rceil$, 称为天花板函数.

若 $x \in \mathbb{Z}$, 则 $[x] = \lceil x \rceil = x$; 若 $x \notin \mathbb{Z}$, 则 $\lceil x \rceil = [x] + 1$.

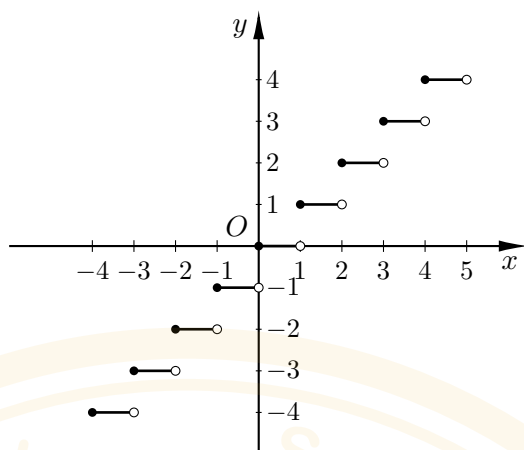
2. 高斯函数的图象

高斯函数 $y = [x]$ 的图象

(1) 列表.

x	$y = [x]$
...	...
$-4 \leq x < -3$	-4
$-3 \leq x < -2$	-3
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1
$2 \leq x < 3$	2
$3 \leq x < 4$	3
$4 \leq x < 5$	4
...	...

(2) 描点, 连线.



3. 高斯函数的性质

- (1) 设 x_1, x_2 都是实数且 $x_1 \leq x_2$, 则 $[x_1] \leq [x_2]$.
- (2) 设 n 是整数, 则 $[x + n] = [x] + n$.
- (3) 设 x 是实数, 则 $x - 1 < [x] \leq x$.
- (4) 若 $a, b \notin \mathbb{Z}$, 且 $a + b = n \in \mathbb{Z}$, 则 $[a] + [b] = n - 1$.
- (5) 若 $a - b \geq 1$, 则 $[a] \neq [b]$; 若 $0 < a - b < 1$, 则 $[a] = [b]$ 或 $[b] + 1$.

探究研讨

例题 10.2.1

解方程: $[x] = 3x - 2, x = \underline{\hspace{2cm}}$.

例题 10.2.2

求 $\left[\frac{23 \times 1}{101} \right] + \left[\frac{23 \times 2}{101} \right] + \cdots + \left[\frac{23 \times 100}{101} \right]$ 的值.

例题 10.2.3

已知 $21! = \overline{DC0909421717094AB000}$, 求 $\overline{ABCD}$.

学以致用

习题 10.2.1

解方程 $3x + 5[x] - 49 = 0$.

习题 10.2.2

和式 $S = \left[\frac{305 \times 0}{503} \right] + \left[\frac{305 \times 1}{503} \right] + \left[\frac{305 \times 2}{503} \right] + \cdots + \left[\frac{305 \times 502}{503} \right]$ 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

习题 10.2.3

已知 $34! = \overline{295cd27990396041408476186096435ab000000}$, 则 $\overline{abcd} = \underline{\hspace{2cm}}$.

組合部分



组合计数与组合原理

引言

本章主要讲解计数原理与排列组合、抽屉原理与容斥原理.

计数原理与排列组合

知识概要

原理 11.1.1 (分类加法计数原理)

做一件事, 完成它可以分成 n 类方法, 在第一类办法中有 m_1 种不同的方法, 在第二类办法中有 m_2 种不同的方法, $\cdots$, 在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法, 则完成这件事共有 $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ 种不同的方法.

分类的原则

分类计数时, 首先根据问题的特点, 确定一个适当的分类标准, 然后利用这个分类标准进行分类, 分类时要注意两条基本原则:

- (1) 完成这件事的任何一种方法必须分为相应的类;
 - (2) 不同类的任何方法必须是不同的方法.
- 只要满足这两条基本原则, 就可以确保计数的不重不漏.

原理 11.1.2 (分步乘法计数原理)

做一件事, 完成它需要分成 n 个步骤, 做第一步有 m_1 种不同的方法, 做第二步有 m_2 种不同的方法, $\cdots$, 做第 n 步有 m_n 种不同的方法, 则完成这件事共有 $m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$ 种不同的方法.

分步的原则

注意以下几点:

- (1) 明确题目中所指的“完成一件事”是指什么事, 单独用题目中所给的某种方法是不是能完成这件事, 也就是说, 是否必须经过几步才能完成这件事;
- (2) 完成这件事需要分成若干个步骤, 只有每个步骤都完成了, 才算完成这件事, 缺少任何一步, 这件事就不可能完成;
- (3) 根据题意, 正确分步, 要求各步之间必须连续, 只有按照这 n 个步骤逐步地去做, 才能完成这件事, 各个步骤之间既不能重复也不能遗漏.

两个计数原理的联系与区别

联系: 两个计数原理都涉及完成一件事情的不同方法的种数.

区别: 分类加法计数原理与分类有关, 各种方法相互独立, 用其中的任一种方法都可以完成这件事; 分步乘法计数原理与分步有关, 各个步骤相互依存, 只有各个步骤都完成了, 这件事才算完成.

定义 11.1.1 (无重排列)

从 n 个不同的元素中任取 m ($m \leq n$) 个元素, 按照一定顺序排成一列, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列 (即无重排列).

定义 11.1.2 (无重排列数)

从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列的个数, 称为排列数 (即无重排列数), 用符号 A_n^m 表示.

公式 11.1.1 (无重排列数计算公式)

$$A_n^m = n(n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}, \text{ 其中 } m \leq n, n, m \text{ 都是正整数.}$$

定义 11.1.3 (无重组合)

从 n 个不同的元素中任取 m ($m \leq n$) 个元素并成一组, 叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合 (即无重组合).

定义 11.1.4 (无重组合数)

从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合的个数, 称为组合数 (即无重组合数), 用符号 C_n^m 表示.

公式 11.1.2 (无重组合数计算公式)

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{A_m^m} = \frac{n(n-1) \cdots (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \text{ 其中 } m \leq n, n, m \text{ 都是正整数.}$$

排列数 A_n^m 与组合数 C_n^m 的联系与区别

联系: 都是从 n 个不同元素中取出 m 个元素.

区别: 前者是“排成一列”, 后者是“并成一组”; 前者有顺序, 后者无顺序.

**探究研讨****例题 11.1.1**

数 916238457 是一个包含 1 至 9 每个数字各恰好一次的 9 位数例子. 它还具有性质数字 1 至 5 以递增的顺序出现在其中, 但 1 至 6 不满足, 则这样的数有 _____ 个.

例题 11.1.2

图 11.1.1 中有多少个三角形?

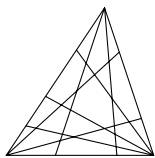


图 11.1.1

例题 11.1.3

如图 11.1.2, A、B、C、D、E 为海上的五个小岛, 要建四座桥, 将这五个小岛连接起来, 则有多少种不同的建桥方案?

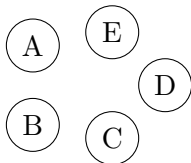


图 11.1.2

例题 11.1.4

艾萨克依次求解 6 道奥数题, 每题得分从 0 到 10, 且后面的题的得分总不高于前面的题. 那么他有多少种不同可能的得分序列.

例题 11.1.5

参加聚会的有男孩和女孩. 每个参加聚会的人都认识 3 个男孩和 7 个女孩. 证明参加聚会的总人数能被 20 整除.



习题 11.1.1

5 个两位正整数以从小到大的顺序写在黑板上. 它们都是 3 的倍数, 且 0 ~ 9 这 10 个数字中的每个数字都在黑板上恰好出现一次. 黑板上的数字组合有多少种可能 (注意两位数不能以 0 开头)?

习题 11.1.2

从 1 ~ 10 中选出 5 个数, 使得这 5 个数中任何两数之和都不等于 11. 这样的选法有多少种? 若选出 4 个数呢?

习题 11.1.3

图 11.1.3 中共有 _____ 个三角形.

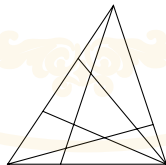


图 11.1.3

习题 11.1.4

如图 11.1.4 所示, A、B、C、D 是海上的四个小岛, 要建三座桥, 将这四个岛连接起来, 不同的建桥方案共有 _____ 种.

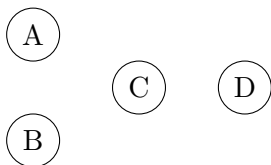


图 11.1.4

🎓 抽屉原理与容斥原理

👤 知识概要

概要 11.2.1 (抽屉原理)

1. 把 $n+1$ 个元素按照任意确定的方式划分成 n 个集合, 那么一定有某个集合含有两个或两个以上的元素.

即把多于或等于 $n+1$ 个物体放到 n 个抽屉里, 则至少有一个抽屉里的东西不少于两件.

2. 把 m 个元素按照任意确定的方式划分成 n ($n < m$) 个集合, 那么一定有某个集合含有 k 个或 k 个以上的元素, 其中

$$k = \begin{cases} \frac{m}{n}, & (n \mid m), \\ \left[\frac{m}{n} \right] + 1, & (n \nmid m). \end{cases}$$

符号 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

即把多于 mn 个物体放到 n 个抽屉里, 则至少有一个抽屉里有不少于 $m+1$ 个物体.

3. 把无穷多个元素按照任意确定的方式划分成有限个集合, 那么一定有某个集合含有无穷多个元素.

即把无穷多件物体放入 n 个抽屉, 则至少有一个抽屉里有无穷个物体.

概要 11.2.2 (三个集合的容斥原理)

计数时, 要做到没有重复, 没有遗漏. 为使重叠部分不重复计算, 可以先不考虑重叠的情况, 把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来, 然后再把计数时重复计算的数目排斥出去, 使得计算的结果不重不漏. 这种计数的方法依赖于容斥原理.

1. 三个集合的容斥原理基本形式

设有限集合 A, B, C 是 U 的子集, 则

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

如图 11.2.1, 以贡献法可以证明上述结论.

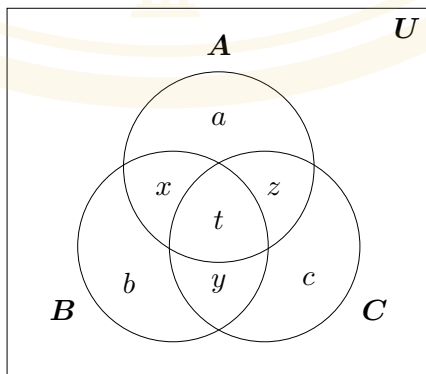


图 11.2.1

将之推广到一般情形: 设有限集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 A 的子集, 则

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

2. 三个集合的容斥原理对偶形式

设有限集合 A, B, C 是 U 的子集, 则

$$|\overline{A \cup B \cup C}| = |U| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |B \cap C| + |C \cap A| - |A \cap B \cap C|.$$

将之推广到一般情形: 设有限集合 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 是 A 的子集, 则

$$\left| \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i} \right| = |A| - \sum_{i=1}^n |A_i| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \dots + (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap \dots \cap A_n|.$$

3. 错位排列

集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个排列 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ 中, 如果 $a_i \neq i, i = 1, 2, \dots, n$, 则称这种排列为一个错位排列 (也称更列).

错位排列的排列数为

$$D_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right).$$

想一想, 如何用容斥原理证明?

例如, 装错信封问题: $n (n \geq 3)$ 封信, 各配一个信封全部装错的个数即为 D_n .



探究研讨

例题 11.2.1

平面上有 5 条直线, 其中任意两条都不平行, 那么在这 5 条直线两两相交所成的角中, 至少有一个角不超过 36° , 请说明理由.

例题 11.2.2

证明: 在十进制表示中, 数 29 的某个正整数次幂的末三位数字为 001.

注: 不必求出这个正整数指数.

例题 11.2.3

3×7 方格表, 每格均以黑或白染色. 求证: 任意染色, 方格表必含一个由格线围成的矩形, 其四角上的小方格同色.

例题 11.2.4

某班举行一次智力测试, 共三题. 每题或者得满分或者得 0 分, 其中第一题满分 10 分, 第二、三题满分各 15 分. 测试结果: 每个学生至少答对一题, 三题全答对的有 2 人, 答对其中两题的有 16 人; 答对第一题的人数与答对第二题的人数和为 33, 答对第一题的人数与答对第三题的人数和为 27, 答对第二题的人数与答对第三题的人数和为 20. 那么这个班的平

均成绩为 _____ 分.

例题 11.2.5

参加大型团体表演的学生共 240 名, 他们面对教练站成一行, 自左至右按 1, 2, 3, 4, 5, ... 依次报数. 教练要求全体学生牢记各自所报的数, 并做下列动作: 先让报的数是 3 的倍数的全体同学向后转; 接着让报的数是 5 的倍数的全体同学向后转; 最后让报的数是 7 的倍数的全体同学向后转. 问:

- (1) 此时还有多少名同学面对教练?
- (2) 面对教练的同学中, 自左至右第 66 位同学所报的数是几?



学必致用

习题 11.2.1

8 本不同的书分给 3 名同学, 要求每个学生至少分得 1 本, 有 _____ 种分法.

习题 11.2.2

(预备知识) 平面内的格点 (也称为整点), 我们可以用两个有序整数 (x, y) 表示 (称之为格点的坐标). 线段 AB 两端点坐标分别为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则这条线段 AB 的中点坐标为 $(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2})$. 空间中的格点, 我们可以用三个有序整数 (x, y, z) 来表示其坐标. 类似地, 可以得到空间中的线段的中点坐标.

(提出问题) 任意给定空间中九个格点 (即坐标皆为整数的点), 求证: 它们之中必有两点, 使连接这两点的直线段内部含有格点.

习题 11.2.3

在 731 ~ 2020 这 1290 个正整数中, 恰好是 3, 5, 7 中两个数的倍数的数共有 _____ 个.

习题 11.2.4

在某夏令营中, 100 名营员每人至少会唱歌, 跳舞或表演中的一项才艺, 有些人的才艺不止一项, 但没有人具备三项才艺. 若有 42 名营员不会唱歌, 有 65 名营员不会跳舞, 有 29 名营员不会表演, 求至少会两项才艺的营员有 _____ 人.

游戏策略与操作变换

导言

本章主要讲解逻辑推理、游戏策略与操作变换.



逻辑推理



知识概要

概要 12.1.1

逻辑推理问题是运用逻辑思维、推理能力和数学知识来解决的一类问题, 往往涉及 (1) 矛盾分析: 利用已知条件中的矛盾或约束进行推理; (2) 假设与验证: 通过假设某种情况, 推导出结论, 并检查是否与条件一致; (3) 分类讨论: 考虑所有可能的情况, 逐一排除.



探究研讨

例题 12.1.1

小明同学输入一个 4 位数字组成的密码, 输了 4 次: 3406、1630、7364、6173. 其中每个密码都对两个数字, 但位置不正确, 则正确密码可能是 _____.



学以致用

习题 12.1.1

在某岛上住着 80 个人, 其中一些人只讲真话, 而其余人只讲假话. 岛上的每个居民最喜欢下列三种颜色之一: 红色、蓝色、紫色. 向岛上每个居民提出三个问题:

- (1) 你最喜欢红色吗? (2) 你最喜欢蓝色吗? (3) 你最喜欢紫色吗?

对第一个问题回答“是”的有 35 人; 对第二个问题回答“是”的有 45 人; 对第三个问题回答“是”的有 10 人. 则这个岛上有 _____ 人只讲真话.

 游戏策略

 知识概要
概要 12.2.1

游戏策略问题通常涉及两人或多人游戏, 玩家轮流行动, 需要找到获胜策略或最优策略. 这类问题要求分析游戏规则、识别模式, 并运用数学推理 (如递推法、反证法或模运算等) 来制定相应策略.

 探究研讨
例题 12.2.1

- (1) 2026 个硬币, A 和 B 两个人轮流拿走一些, 每次拿走的个数只能是 1, 2, 3, 4 中的一个数. A 先拿, 谁最后拿硬币为输. 问: A 或 B 有无策略保证自己赢?
- (2) 2026 个硬币, A 和 B 两个人轮流拿走一些, 每次拿走的个数只能是 1, 2, 3, 4 中的一个数. A 先拿, 谁最后拿硬币为赢. 问: A 或 B 有无策略保证自己赢?

例题 12.2.2

- (1) 2026 个硬币, A 和 B 两个人轮流拿走一些, 每次拿走的个数只能是 1, 2, 4 中的一个数. A 先拿, 谁最后拿硬币谁输. 问: A 或 B 有无策略保证自己赢?
- (2) 2026 个硬币, A 和 B 两个人轮流拿走一些, 每次拿走的个数只能是 1, 2, 4 中的一个数. A 先拿, 谁最后拿硬币谁赢. 问: A 或 B 有无策略保证自己赢?

例题 12.2.3

Alex 和 Katy 在一个由 64 个单元格组成的 8×8 正方形网格上做游戏. 两人轮流行动, 从 Alex 开始. 在 Alex 的回合, 他在一个空格中写上“A”; 在 Katy 的回合, 她在两个有公共边的空格中各写上一个“K”. 当一方无法继续时, 游戏结束. Katy 的得分为游戏结束时网格中 K 的个数. 求 Katy 保证能得到的最高分数.

 学以致用
习题 12.2.1

在黑板上写下数 2, 3, 4, $\dots$, 1994, 甲先擦去其中一个数, 然后, 乙再擦出一个数, 如此轮流下去. 若最后剩下两个互质数时, 甲胜; 若最后剩下两个数不互质时, 乙胜. 试说明, 甲先擦数, 存在必胜的策略.

习题 12.2.2

两人进行数学游戏, 轮流从 1, 2, 3, $\dots$, 16, 17 这 17 个自然数中划去一个数, 直至剩下一个数为止, 如果所划去的 16 个数的和能被 5 整除, 则判首先开始的人胜, 否则第二个人胜. 试问: 在正确的游戏策略中, 谁将获胜? 请说明你的理由.

习题 12.2.3

16 个硬币, A 和 B 两个人轮流拿走一些, 每次拿走的个数只能是 1, 2, 3, 4 中的一个数. 谁最后拿硬币谁输. 问: A 或 B 有无策略保证自己赢?

习题 12.2.4

(1) k 个硬币, A 和 B 两个人轮流拿走一些, 每次拿走的个数只能是 1, 2, 3, 4 中的一个数. A 先拿, 谁最后拿硬币为输. 问: A 或 B 有无策略保证自己赢?

(2) k 个硬币, A 和 B 两个人轮流拿走一些, 每次拿走的个数只能是 1, 2, 3, 4 中的一个数. A 先拿, 谁最后拿硬币为赢. 问: A 或 B 有无策略保证自己赢?

习题 12.2.5

16 个硬币, A 和 B 两个人轮流拿走一些, 每次拿走的个数只能是 1, 2, 4 中的一个数. 谁最后拿硬币谁输. 问: A 或 B 有无策略保证自己赢?

习题 12.2.6

(1) 2015 个硬币, A 和 B 两个人轮流拿走一些, 每次拿走的个数只能是 1, 3, 5 中的一个数. 谁最后拿硬币谁输. 问: A 或 B 有无策略保证自己赢?

(2) k 个硬币, A 和 B 两个人轮流拿走一些, 每次拿走的个数只能是 1, 3, 5 中的一个数. 谁最后拿硬币谁输. 问: A 或 B 有无策略保证自己赢?

习题 12.2.7

在连续排列的 2000 个方格内进行游戏, 规定: 两人轮流在空格内填 S 或 O, 谁先在 3 个连续格子里拼出 SOS, 则获胜. 若填满未出现 SOS, 则视为平局. 证明: 后填者有获胜策略.

习题 12.2.8

甲和乙在一个 6×6 的方格表里做游戏. 每个人轮流在一个空格里填入一个前面没有出现过的有理数, 甲先填. 当所有格子都被填满时, 把每一行里最大的数涂黑, 若能从上至下画一条经过黑格的线, 就判甲获胜; 若不能, 则乙获胜 (若两个格子有公共顶点, 可以画一条经过这两格的线). 寻求并证明一种可以使游戏者中一方获胜的策略.

习题 12.2.9

两人用偶数张纸片做游戏, 在每张上任意写一个正整数, 打乱顺序, 排成一行, 且写数的面向上. 两人轮流从任一端取走一张, 直至全部取完. 每人得分是其所取纸片上的数之和.

在正确游戏策略下, 先取者与后取者, 是否有一方的得分可不少于另一人的? 如果有, 是谁, 并说明理由.

习题 12.2.10

杰克船长与他的海盗们掠夺到 6 个珍宝箱 $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, 其中 $A_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ 内有金币 a_i 枚 (诸 a_i 互不相等). 海盗们设计了一种箱子的布局图 (如图 12.2.1), 并推派一人和船长轮流拿珍宝箱. 每次可任意拿走不与两个或两个以上的箱子相连的整个箱子. 如果船长最后所取得的金币不少于海盗们所取得的金币, 那么船长获胜.

问: 若船长先拿, 他是否有适当的取法保证获胜?

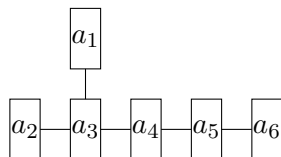


图 12.2.1

习题 12.2.11

101 个正整数在黑板上写成一行, 每次允许将任意两个相邻数各减去 1. 现已知通过如此操作, 最终可得数组 $(1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0)$ 和 $(0, 0, 0, \dots, 0, 0, 1)$.

- (1) 能否通过如此操作, 使得最终得到的数组的第 50 个数为 1, 其余为 0?
- (2) 能否通过如此操作, 使得最终得到的数组的第 51 个数为 1, 其余为 0?

习题 12.2.12

列莎将正整数 1 至 22^2 分别写在 22×22 方格表的小方格中 (每格写有一个整数). 试问: 阿列克能否选择 2 个具有公共边或公共顶点的方格, 使得写在其中的数之和是 4 的倍数?

习题 12.2.13

一个包里有 m 个球, 另一个包里有 n 个球, 其中 $m, n > 0$. 允许进行下面两种不同操作: (a) 从每个包里取出相同数目的球; (b) 把一个包里的球的数目翻一番.

问经有限次操作能否使得两个包都取空?

若将操作 (b) 改为“(c) 把一个包里的球的数目变成原来的三倍”, 则经有限次操作能否使得两个包都取空?

习题 12.2.14

将任意 2025 个箭头从左到右依次排列, 每个箭头指向左或右. 求证: 存在一个箭头, 它指向的箭头个数与指向它的箭头个数相同.

操作变换

知识概要

概要 12.3.1

操作问题, 有考查计算技巧与计算的深度的, 有对某个量由算两次原理进行推理的, 有根据奇偶性、整除性判定终止结果的, 有通过染色分析解决的, 有利用不变量分析的, ……正是这种所用方法的不确定性与思维的创新性, 使得操作变换问题优雅而有魅力!

探究研讨

例题 12.3.1

在图 12.3.1 的表格中, Zosia 将其中 8 个数替换为其相反数, 使得每一行和每一列恰好包含两个负数. 证明: 操作后表格中所有 16 个数的总和等于 0.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

图 12.3.1

例题 12.3.2

5×5 方格表中的每个 1×1 方格都包含一个指向上、下、左或右的箭头. 证明可以从这个 5×5 方格表中恰好删除 20 个箭头, 剩下的 5 个箭头中没有两个指向同一个 1×1 方格.

例题 12.3.3

n 为正奇数, 将 n 个箭头从左到右依次排列, 每个箭头指向左边或右边. 求证: 存在一个箭头, 其指向的箭头个数与指向其的箭头个数相同.

注: 例如, $n = 5$ 时, 在排列

→ → ← ← →

中, 每个箭头所指向的箭头个数依次为 4, 3, 2, 3, 0.

例题 12.3.4

将正 10 边形的各顶点染成红、黄、蓝三色之一, 现可重复如下操作: 选择两个颜色不同的相邻顶点, 将它们重染成第三种颜色.

试问经有限次操作, 能否使得最后所有顶点同色? 说明你的理由. 正 11 边形与正 12 边形呢?



习题 12.3.1

在黑板上写上三个整数,然后将其中一个擦去,换上其他两数之和与 1 之差,将这个过程重复若干次之后得 $(17, 1967, 1983)$, 问一开始黑板上写出的三个数是否可能是 $(2, 2, 2)$ 或 $(3, 3, 3)$.

习题 12.3.2

给定写有整数的 3×3 方格表,如图 12.3.2. 现每次允许将其中某相邻两格分别加上同一个数. 问经过若干次这样的步骤后,可否使得方阵中四个角上方格中的数为 1, 而其余五格中的数都为 0?

0	3	2
6	7	0
4	9	5

图 12.3.2

习题 12.3.3

下图中间是空格,可以把空格边上的任何一个小正方形移到空格处. 请问能否经过有限次操作把图 12.3.3 变成图 12.3.4. 说明你的理由.

A	B	C
E		D
F	G	H

图 12.3.3

A	B	C
D		E
F	G	H

图 12.3.4

习题 12.3.4

盒子里有 2000 个白球,另有足够数量的绿球、红球及更多的白球可用. 在盒子里可作如下操作:

- (1) 用 1 个绿球与 2 个白球互换;
- (2) 用 1 个绿球与 2 个红球互换;
- (3) 用 1 个白球、1 个红球与 2 个绿球互换;
- (4) 用 1 个红球与 1 个白球、1 个绿球互换;
- (5) 用 1 个白球与 1 个绿球、1 个红球互换.

请完成下面两个问题:

- (a) 求证: 经有限次操作后, 盒子里可以还剩 3 个球, 并且其中必有 1 个是绿球.
- (b) 经有限次操作后, 盒子里是否可能还剩 1 个球?

习题 12.3.5

圆上 2004 张书签, 每张一面白一面黑. 定义一次变动: 选 1 张黑面朝上的书签, 将之与其相邻的 2 张书签一起翻转过来. 设开始仅 1 张黑面朝上的书签, 是否经若干次变动可将所有书签都变为白面朝上? 2003 张呢?

习题 12.3.6

如图 12.3.5, 在 3×3 的正方格 (a) 和 (b) 中, 每格填“+”或“-”的符号, 然后每次将表中任一行或任一列的各格内符号全部改变.

试问重复若干次这样的“变号”程序后, 能否从一张表变化为另一张表.

+	+	-
+	+	-
-	-	+

(a)

-	-	+
+	-	-
-	-	+

(b)

图 12.3.5

习题 12.3.7

一个圆分成 6 个扇形. 把数 1, 0, 1, 0, 0, 0 按逆时针方向依次填入扇形中. 可以把两个相邻的数都增加 1. 通过若干步后, 是否能使所有 6 个数都相同?

习题 12.3.8

如图 12.3.6, 开始时, 5×5 方格表中的每个方格中都填有一个 0, 每一步选取两个具有公共边的方格, 将其中的数同时加 1 或同时减 1. 若干步后, 各行、各列中的数之和彼此相等. 求证: 所经过的步数为偶数.

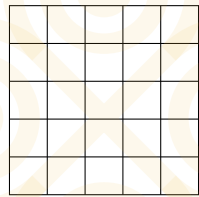


图 12.3.6

组合几何与组合最值

导言

本章主要讲解组合几何、组合最值.

组合几何

知识概要

概要 13.1.1

组合几何问题, 结合了组合数学的计数、存在性证明和几何图形的性质. 这类问题通常不涉及复杂的计算, 而是侧重于巧妙的思维和推理.

经典的组合几何问题包括格点、覆盖、凸包、图论等, 入门级的问题往往不涉及太多组合几何的相关知识, 更倾向于考查思考能力.

探究研讨

例题 13.1.1

如图 13.1.1, 设 $A_1, A_2, \dots, A_{21}$ 为圆内接正 21 边形, 从这 21 个顶点中选出 n 个不同的顶点, 使得这 n 个点中任意两点之间的距离均不相等.

- (1) 求两个顶点之间的不同距离有多少种?
- (2) 求证: $n \leq 5$.
- (3) 求 n 的最大可能值, 并将相应的顶点及表示不同距离的连线画在图 13.1.2 中.

注: 图 13.1.1 可用于分析问题.

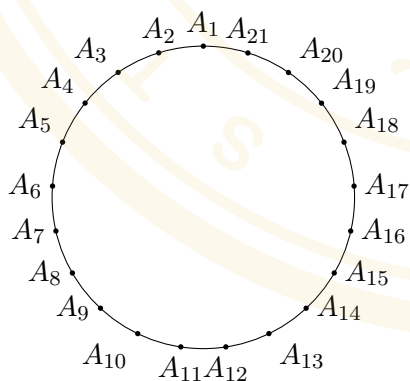


图 13.1.1

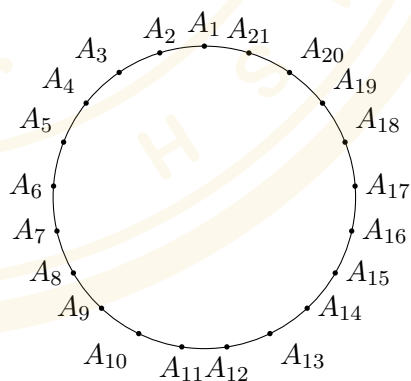


图 13.1.2

例题 13.1.2

有一个 6×6 的棋盘, 被 18 块 1×2 的纸片完全盖住. 问: 是否存在一条直线 l , 将棋盘划分为非空的 2 块, 且 l 不穿过任何一张纸片?



习题 13.1.1

阿里巴巴试图潜入山洞. 在山洞入口处有一面鼓, 鼓的侧面有四个一模一样的小孔, 组成正方形的四个顶点. 在每个孔的里面各装有一个开关. 开关有“上”、“下”两种状态 (注意: 眼睛看不见!) 如果四个开关的状态全都一致, 洞门即可打开. 现允许将手指伸入任意两个小孔, 触摸开关以了解其状态, 并可随自己的意愿改变或不改变其状态. 但每当这样做了之后, 鼓就要飞快地旋转, 以致在停转之后无法确定刚才触动了哪些开关. 证明: 阿里巴巴至多需要将手指伸入五次, 就可以进入山洞.

习题 13.1.2

我们尝试用 1×1 、 2×2 、 3×3 的三种正方形图案不重叠地恰好铺满 11×11 的方格表.

(1) 方方与圆圆两位同学一起探究: 能否只用 2×2 与 3×3 的图案不重叠地恰好铺满 11×11 的方格表?

方方认为应该存在满足要求的方案, 只是自己还没有找到.

圆圆却在多次试验不成功的情况下, 利用如下方法得出否定的结论: 假定存在满足要求的方案, 并尝试用染色的方法来分析, 最终得出矛盾, 从而得知不存在满足要求的方案. 她的染色方式为: 如图 13.1.3, 将 11×11 的方格表从上到下, 依一行黑两行白循环染色, 三轮之后, 所剩两行为一行黑一行白.

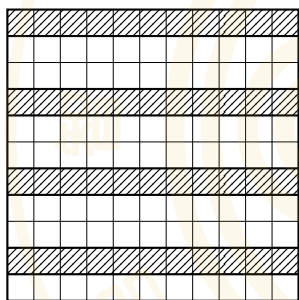


图 13.1.3

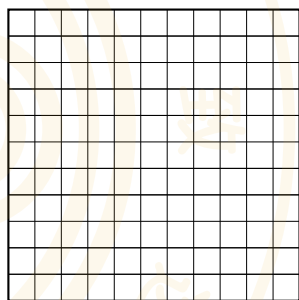


图 13.1.4

(a) 请分别写出用 1 个 2×2 或 1 个 3×3 的正方形图案覆盖的方格各是几个黑格几个白格?

(b) 圆圆是如何得出矛盾的, 请你帮助她写出完整的分析过程.

(2) 请在图 13.1.4 中设计一个只用 1 个 1×1 的图案及任意多个 2×2 与 3×3 的图案不重叠地恰好铺满 11×11 的方格表的方案.

 组合最值

 知识概要

概要 13.2.1 (组合最值问题)

有这样一类问题——探索存在满足要求 (最值, 可以是最大或最小) 的例子的可能性. 结论有两种情况: 不存在例子 (否定的) 或存在例子 (肯定的).

求解时, 我们可以假定存在满足要求的例子, 结合题中条件与相关知识, 推出矛盾或者关于最值的结论. 如果出现矛盾, 由反证法可知结论是否定的; 如果利用所学知识 (方程或不等式, 整除或同余, 抽屉原理, 排序或分组, 特例调整, 最不利情形等) 得到关于最值的结论, 可结合推导过程, 构造出满足要求的例子.

 探究研讨

例题 13.2.1

将 7 个互异的非零完全平方数排成一行, 且任意相邻 3 个数的和大于 100. 求这 7 个数的和的最小值.

例题 13.2.2

求最小整数 $n \geq 1$, 使得 $n \times n$ 正方形可以分割成大小为 1×1 和 2×2 的正方形, 且两种大小的正方形一样多.

例题 13.2.3

从 $1, 2, \dots, 16$ 共 16 个自然数中取出 k 个数, 确保其中有两个数满足其中一个是另一个的 2 倍, 求 k 的最小值.

例题 13.2.4

求最小的正整数 $n \geq 3$, 使得在 $1 \sim 303$ 这 303 个正整数中, 任取 n 个数, 都存在 3 个互不相同的数 a, b, c 满足 $a + 2b = c$.

例题 13.2.5

不管将 $1 \sim n$ 分成怎样的两组, 总有一组中存在 4 个数 (可含有相同数), 使得其中的一个数等于另三个数的和. 求正整数 n 的最小值.

例题 13.2.6

试求最小的正整数 n , 使得对于任何 n 个连续正整数中, 必有一数, 其各位数字之和是 7 的倍数.

 学以致用

习题 13.2.1

(1) 能否将 $1, 2, \dots, 13$ 按某一顺序排成一行, 使任意相邻 3 个数的和都不大于 20? 试说明理由.

(2) 将 $1, 2, \dots, 13$ 按某一顺序排成一行, 使任意相邻 3 个数的和都不大于 n , 求能排成时 n 的最小值.

习题 13.2.2

将 $1, 2, 3, \dots, 3n$ 分成 n 组, 每组 3 个不同的数 x, y, z , 满足 $x + y = 3z$, 求 n 的最小可能值.

习题 13.2.3

从 $1 \sim 14$ 中最多可以选多少个数, 使得其中任意两个数的差的绝对值不是 3 且不是 5?

习题 13.2.4

将 $1, 2, \dots, n$ 任意分成两组, 其中两组中至少有一组中有 6 个整数 (不必不同) 满足其中 5 个数之和为第 6 个数. 则满足条件的最小正整数 $n =$ _____.

习题 13.2.5

将 $1, 2, \dots, 16$ 按某一顺序排成一行, 使得任意相邻 3 个数的和都不大于 n , 求能够排成时 n 的最小值.

习题 13.2.6

将 $1, 2, \dots, 17$ 按某一顺序排成一行, 使得任意相邻 4 个数的和都不大于 n . 求能够排成时 n 的最小值.

习题 13.2.7

任意 n 个正整数中, 至少有两个整数的平方差是 11 的倍数. 求 n 的最小值.

注: a, b 两数的平方差 $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

习题 13.2.8

已知 $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$ 的值为 1 或 -1 , 求 $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{2014}x_{2015} + x_{2015}x_1$ 的最小非负整数值.

习题 13.2.9

在 $1, 2, \dots, 2012$ 中取一组数, 使得任意两数之和不能被其差整除, 最多能取多少个数?

习题 13.2.10

从 $1 \sim 100$ 中最多可取出多少个数, 使得其中任意两个不同数之和都不被 7 整除?

习题 13.2.11

从 $1, 2, \dots, 23, 24$ 共 24 个正整数中任取 k 个数, 确保其中有两个数满足其中一个是一个的 3 倍, 求 k 的最小值.

习题 13.2.12

从 $1, 2, \dots, 32$ 中任意选取 k 个数, 使得其中一定存在两个数, 且一个数是另一个数的 2 倍. 求 k 的最小值.

习题 13.2.13

求最小的正整数 n , 使得从 1 到 202 这 202 个正整数中, 任取 n 个数, 其中都存在 3 个互不相同的数 a, b, c , 满足 $a + 2b = c$.

习题 13.2.14

若对于任意 n 个连续正整数中, 总存在一个数的数字之和是 8 的倍数. 试确定 n 的最小值, 并说明理由.



集萃部分



丘少选拔真题集萃

导言

本章主要提供部分国内重点中学丘成桐少年实验班选拔试题的解析.

🎓 全国重点中学丘少选拔真题集萃

习题 14.1.1

三位数的百位、十位、个位逐渐减小, 如果百位、个位调换位置, 新的三位数和原来的三位数的最大公因数是 4, 则原来的三位数最大是 _____.

习题 14.1.2

$\varphi(x)$ 表示不超过 x 的非 0 自然数中与 x 互质的自然数的个数, $\varphi(25) =$ _____;
 $\varphi(77) =$ _____.

习题 14.1.3

小明一步跨 2 级或 3 级台阶, 一共 20 级台阶有 _____ 种不同的走法.

习题 14.1.4

有一堆石子, 甲乙两人轮流取, 甲先取, 乙后取, 每次 1~5 颗, 如果一共 12 颗, 取走最后一颗的胜, 那么 _____ 必胜; 如果一共 2024 颗, 那么 _____ 必胜.

习题 14.1.5

一串数: 1, 2, 4, 8, ... 从第二个开始, 每一个都是前一个的两倍. x_n 表示数串中小于等于 n 的个数, 则 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{49} + x_{50} =$ _____.

习题 14.1.6

如图 14.1.1, 四边形 $ABCD$ 的面积为 6, 将 BA 、 AD 、 DC 、 CB 延长 3 倍得到新的四边形 $EFGH$, 四边形 $EFGH$ 的面积是 _____.

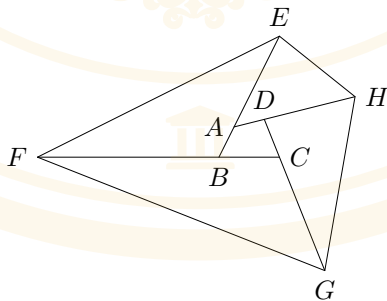


图 14.1.1

习题 14.1.7

定义 Δ 如下: ① $\Delta(1) = 3$, $\Delta(2) = 4$; ② $\Delta(n+2) = \frac{\Delta(n+1)}{\Delta(n)}$, 则 $\Delta(6) \times \Delta(9) =$ _____.

习题 14.1.8

三个人从五个景点中分别选择一处游览,且可以选择相同的景点,则共有 _____ 种浏览景点的方法.

习题 14.1.9

正方形 $ABCD$ 中, $AC = 4$, 分别以 A, B, C, D 为圆心, 2 为半径画弧, 得到如图 14.1.2, 则阴影部分的面积为 _____ (π 取 3).

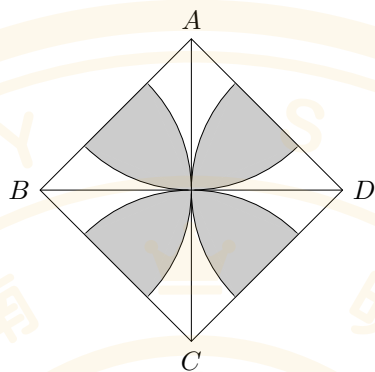


图 14.1.2

习题 14.1.10

小华 5 点半吃完晚饭, 之后出门散步, 并在六点半前回家, 出发时看到分针与时针垂直, 回来时分针与时针还是垂直, 则小华散步的时长为 _____ 分钟.

习题 14.1.11

已知 $S = \frac{7}{123} + \frac{7}{124} + \frac{7}{125} + \cdots + \frac{7}{172}$, 则 S 的整数部分为 _____.

习题 14.1.12

如图 14.1.3, 在三角形 ABC 中, D, E 分别为线段 AC, BC 上的点, 且 $CD = 3AD$, $BE = 2EC$, 连接 AE, BD , 交于点 F , 若三角形 ADF 的面积为 1, 则三角形 ABC 的面积为 _____.

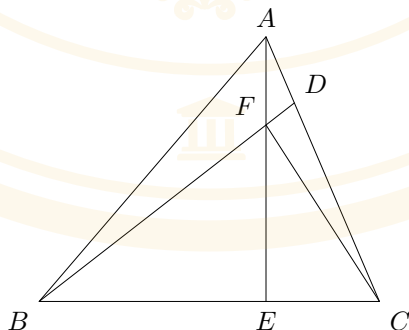


图 14.1.3

习题 14.1.13

从如下图 14.1.4 中正九边形的顶点中选出 3 个顶点连成钝角三角形, 则不同的选法有 _____ 种.

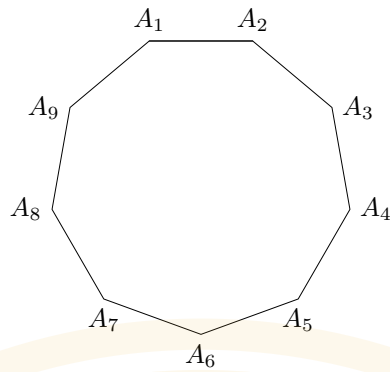


图 14.1.4

习题 14.1.14

根据如下数表的变化规律, 2025 在第 _____ 行第 _____ 列.

1	2	4	7	11	
3	5	8	12		
6	9	13			
10	14				
15					

习题 14.1.15

已知甲种糖果利润率为 30%, 乙种糖果利润率为 60%, 如果将甲、乙两种糖果按 5 : 1 的重量比例混合, 得到的什锦糖果利润率为 36%, 商店老板希望什锦糖果的利润率为 50%. 则甲、乙两种糖果应该按 _____ 的重量比混合.

习题 14.1.16

用 0、1、2、3、4、5 这 6 个数中选择 4 个组成没有重复数字的四位偶数, 将这些偶数从小到大排列起来, 第 66 个是 _____.

习题 14.1.17

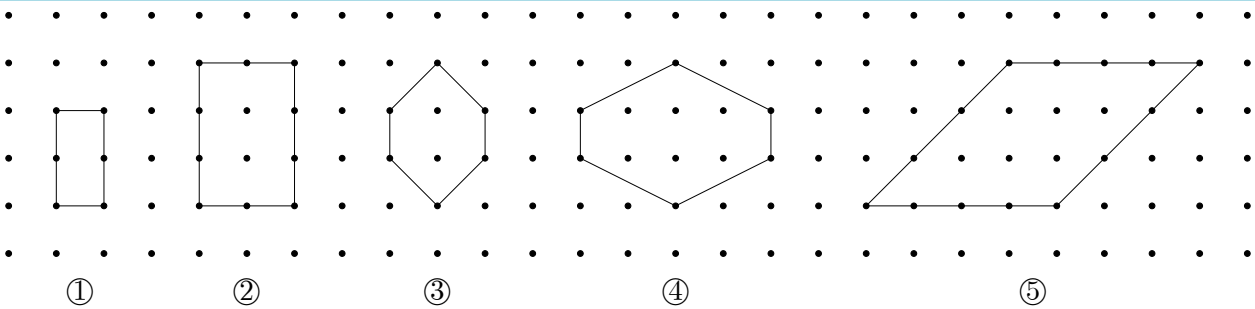
对于一个自然数, 用与这个数互质且大于 2 的最小自然数替换这个数, 称为一次互质替换”, 在黑板上任意写出一个大于 2025 的自然数, 反复进行“互质替换”, 最多经过 _____ 次“互质替换”首次出现 3.

习题 14.1.18

我们约定, 将自然数中能被 3 整除的数称为“三合数”, 不能被 3 整除的数称为“三素数”. 从 1 到 20 的自然数中任取一个“三合数”与一个“三素数”相乘得到 84 个乘积, 则这 84 个乘积的和为 _____.

习题 14.1.19

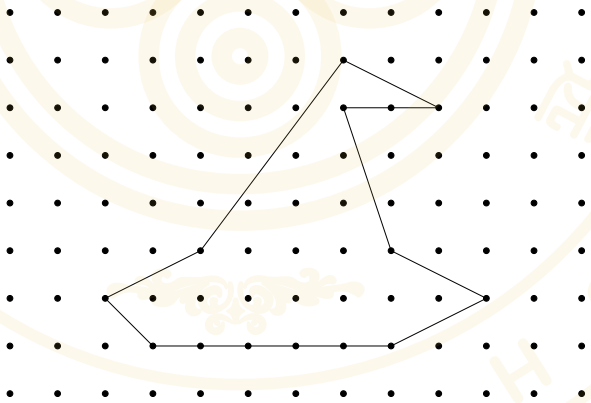
奥地利数学家皮克 (Pick) 发现, 在网格中, 顶点均在格点的多边形面积 S 可以由多边形内部格点数 i 和边界格点数 b 计算得到, 请你观察下列图形, 探索 S 与 i 和 b 之间的关系.



(1) 观察图形, 补全表格.

图形	①	②	③	④	⑤
i	0	2	2	6	_____
b	6	10	6	6	_____
S	2	6	4	_____	12

- (2) 观察 ①、③、④ 可以发现, i 每增加 1 时, 面积增加 _____.
- 观察 ② 和 ③, ④ 和 ⑤ 可以发现, b 每增加 1 时, 面积增加 _____.
- 根据上述发现, 可得: $S =$ _____ (用含 i 和 b 的式子表示).
- (3) 根据你发现的结论计算下面图形的面积.



习题 14.1.20

如图 14.1.5, 在一个矩形信息传输线路中, 有 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 、 A_5 五个信息基站, 其中基站 A_1 和 A_2 的距离为 48 个单位长度, A_2 和 A_3 的距离为 24 个单位长度, A_2 和 A_4 为变速基站. 信号源经过 A_2 基站时速度会变为原来的一半, 信号源经过 A_4 基站时速度会变为原来的 2 倍. 信号源 P 从 A_1 出发按顺时针方向沿线路传输到 A_5 被接收, 信号源 Q 从 A_5 出发按逆时针方向沿线路传输到 A_1 被接收. 信号源 P 和信号源 Q 同时出发, 速度分别为每秒 8 个单位长度和每秒 4 个单位长度, 运动时间为 t 秒, 信号源 Q 与基站 A_1 、 A_5 构成的三角形面积 S 与运动时间 t 的变化情况如图 14.1.5 所示.

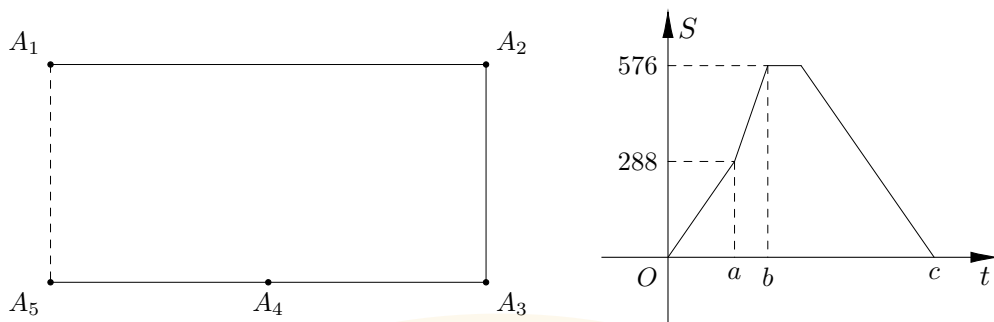


图 14.1.5

- (1) 图中, $a =$ _____, $b =$ _____, $c =$ _____.
- (2) 若两个信号源的距离不超过 10 个单位长度时会互相干扰, 求信号源 P, Q 在传输过程中相互干扰的时长.
- (3) 当运动时间为 t 秒时 ($0 \leq t \leq 18$), 信号源 P 与基站 A_1, A_5 构成的三角形面积 S' 和信号源 Q 与基站 A_1, A_5 构成的三角形面积 S 相差 12, 求 t 所有可能的取值.

习题 14.1.21

计算 $\frac{18}{1 \times 2 \times 3} + \frac{17}{2 \times 3 \times 4} + \frac{16}{3 \times 4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{18 \times 19 \times 20} =$ _____.

习题 14.1.22

妈妈今年 74 岁, 她养育了一个儿子和一个女儿, 大的是儿子, 小的是女儿, 当儿子 32 岁时, 妈妈的年龄比女儿年龄的 2 倍还大 4 岁, 当女儿年龄是儿子的 $\frac{2}{3}$ 时, 妈妈恰为 40 岁, 那么儿子今年 _____ 岁.

习题 14.1.23

如图 14.1.6, 已知正方形 $ABCD$ 的面积为 340, E 是 AB 的中点, F, G 分别是边 BC, AD 上的点, 且 $\frac{BF}{FC} = \frac{1}{2}$, $\frac{AG}{GD} = \frac{3}{2}$. 连接 EG, EC, FG , 其中 EC, FG 交于点 O , 则三角形 EOG 的面积为 _____.

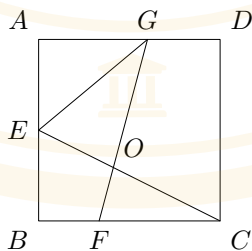


图 14.1.6

习题 14.1.24

如图 14.1.7, 正方形 $ABCD$ 的面积为 9, 正方形 $AEFG$ 的面积为 8, $\angle DAE = 45^\circ$, 连接 BE, CF , 交于点 O , 则 $\triangle BOC$ 与 $\triangle EOF$ 的面积之差为 _____.

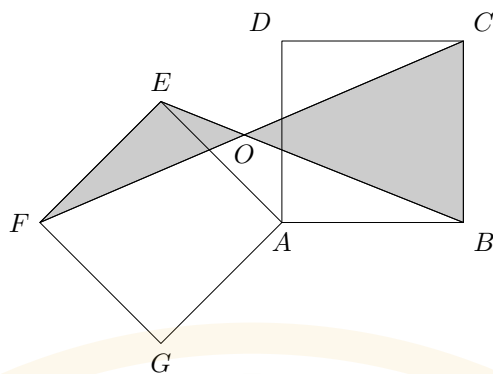


图 14.1.7

习题 14.1.25

黑板上写着 1 至 2025 共 2025 个自然数, 小明每次擦去两个奇偶性相同的数, 再写上它们的平均数, 最后黑板上只剩下一个自然数, 在这个数的所有可能的取值中, 最大值为 _____.

习题 14.1.26

已知 m, n, k 为正整数, $m \geq n \geq k$, $2^m + 2^n - 2^k$ 是 208 的倍数, 则 $m + n - k$ 的最小值为 _____.

习题 14.1.27

把 108 个连续正偶数之和分解质因数, 得到 $A^3 \times B^2 \times C^2 \times D$ 的形式, 那么这 108 个连续正偶数中最小的数至少是多少?

习题 14.1.28

有两个两位数, 它们的差是 16, 将它们分别平方, 得到的两个平方数的末两位数相同, 求这两个数中较大者的所有可能取值.

后 记

编余琐记

当这本 2026 版的《丘成桐少年实验班数学专题教学指导》即将付印之时, 校对完最后一页排版, 我内心既有如释重负的轻松, 也有一丝敬畏. 从最初的一份份讲义, 到两年前第一版问世, 再到如今结合各方反馈重新修订、排版, 这本书如同我教过的一届届学生, 经历着打磨与蜕变.

书稿已定, 但在放下笔的这一刻, 我总觉得还有些话, 应当在“后记”里与大家交代. 我不是想再补充什么解题大招, 而是想结合我这些年带竞赛班、辅导孩子们考入清华丘班、中科大少创班的经验, 专门谈谈“**如何阅读这本书**”, 以及“**何为真正的数学学习方法**”.

写这篇琐记, 权当是我作为教练, 给每一位拿到此书的读者上的“第一堂导学课”.

一、关于“看”与“做”: 请务必经历思考的挣扎

我见过很多聪明的孩子, 拿到一本好书, 如饥似渴地翻看例题解析, 边看边点头, 觉得“原来如此, 我都懂了”. 但这往往是一种“伪懂”.

数学不是看会的, 是“想”会和“做”会的. 本书的代数、几何、数论与组合四大板块, 例题极为经典. 希望大家在使用时, **务必先遮住解析**. 哪怕你盯着题目想了二十分钟毫无头绪, 哪怕你只写出了一个显然错误的开头, 这段“挣扎”的时间也是极具价值的. 当你百思不得其解时再去翻看解答, 那种思维的碰撞和“原来只需多加一条辅助线”的顿悟, 才是你真正收获的东西.

二、关于“专题”与“体系”: 学会织网, 而非捡珍珠

本书特意打破了常规教材的线性编排, 采用了专题式推进. 为什么要这样? 因为顶尖的数学选拔, 考查的绝不是单一知识点的熟练度, 而是知识交叉处的深度.

在学习时, 希望大家不要把这些章节看成孤立的岛屿. 比如, 你在阅读第 9 章的“不定方程”时, 是否能用上第 8 章“整除与带余除法”的工具? 在解决第 13 章“组合最值”时, 能否借用第 7 章“几何最值”的极端原理思想? **我的建议是: 准备一支红笔, 在书中建立“超链接”**. 当你学到后文, 发现与前文有关联时, 做个标记. 当你能够把不同专题的思想方法像织网一样连起来时, 你的数学架构才算真正立住了.

三、关于“畏难”与“攀登”: 用好真题, 建立强大的心态

本次改版, 我特别加入了第 14 章“全国重点中学丘少选拔真题集萃”. 很多同学做前面的专题觉得还行, 一碰真题就感到吃力. 这是非常正常的.

真题不仅仅是为了测试你的水平, 更是为了让你体会出题人的真实意图和难度. 对于这套题, **我的建议是“限时模拟, 错题溯源”**. 如果某道真题做不出, 不要气馁, 请回到书本的相应专题中去寻找对标的例题和定理. 把真题当作检验和串联你前文所学知识的“试金石”. 至于第 10 章的高斯函数、第 12 章的游戏策略, 有些题目可能需要反复咀嚼好几天. 请保持耐心, 在数学的高峰上, 多停留一会儿, 看到的风景自会不同.

四、给教练与家长的一点心里话

对于一线的教师同行, 这本书中的很多例题我都做了留白处理, 没有给出详尽到每一步的解析. 这是为了给您留出引导学生“说题”、“探究”的空间. 您可以把书中的题目当做母题, 引

导孩子们去改变条件、改变结论, 做变式探究.

对于陪伴孩子阅读的家长, 我想说: 培养拔尖的数学人才, 需要“慢”的智慧. 请允许孩子在某些章节卡壳, 允许他们在算式里绕弯路. 您不需要懂所有的数学定理, 您只需鼓励他们大胆说出自己的思路, 哪怕这思路是错的. 只有在不断的试错与自我修正中, 孩子们的逻辑才会变得坚韧.

数学的教与学, 是一场漫长的修行, 也是最具乐趣的智力游戏. 编写这本书, 我倾注了全部的心血, 但也深知学海无涯, 书中难免有未尽完善之处. 欢迎广大同行与读者不吝赐教, 与我共同探讨.

最后, 我想把这本书献给所有热爱数学、敢于挑战的少年们. 丘成桐先生曾说, 数学是追求真善美的过程. 愿你们在这本书的陪伴下, 不仅能在各类选拔中脱颖而出, 更能在这段旅程中, 感受到数学那份简洁、严谨与深奥之美.

费培鹏

2026 年 10 月于深圳福田

读者纠错 交流完善

本书中问题虽经反复推敲, 但仍恐有疏漏. 若您在阅读或练习过程中, 发现题目、提示、解析、编排上的错误, 或对某处思路有不同意见, 恳请不吝指正. 您的每一次质疑与提醒, 都是我们修订和完善它的宝贵依据, 谨致以诚挚感谢.

联系方式:

微信: omaths

邮箱: fzp@omaths.com

来信请注明页码、题号及具体问题, 以便我们及时核查与回复.

符号释义

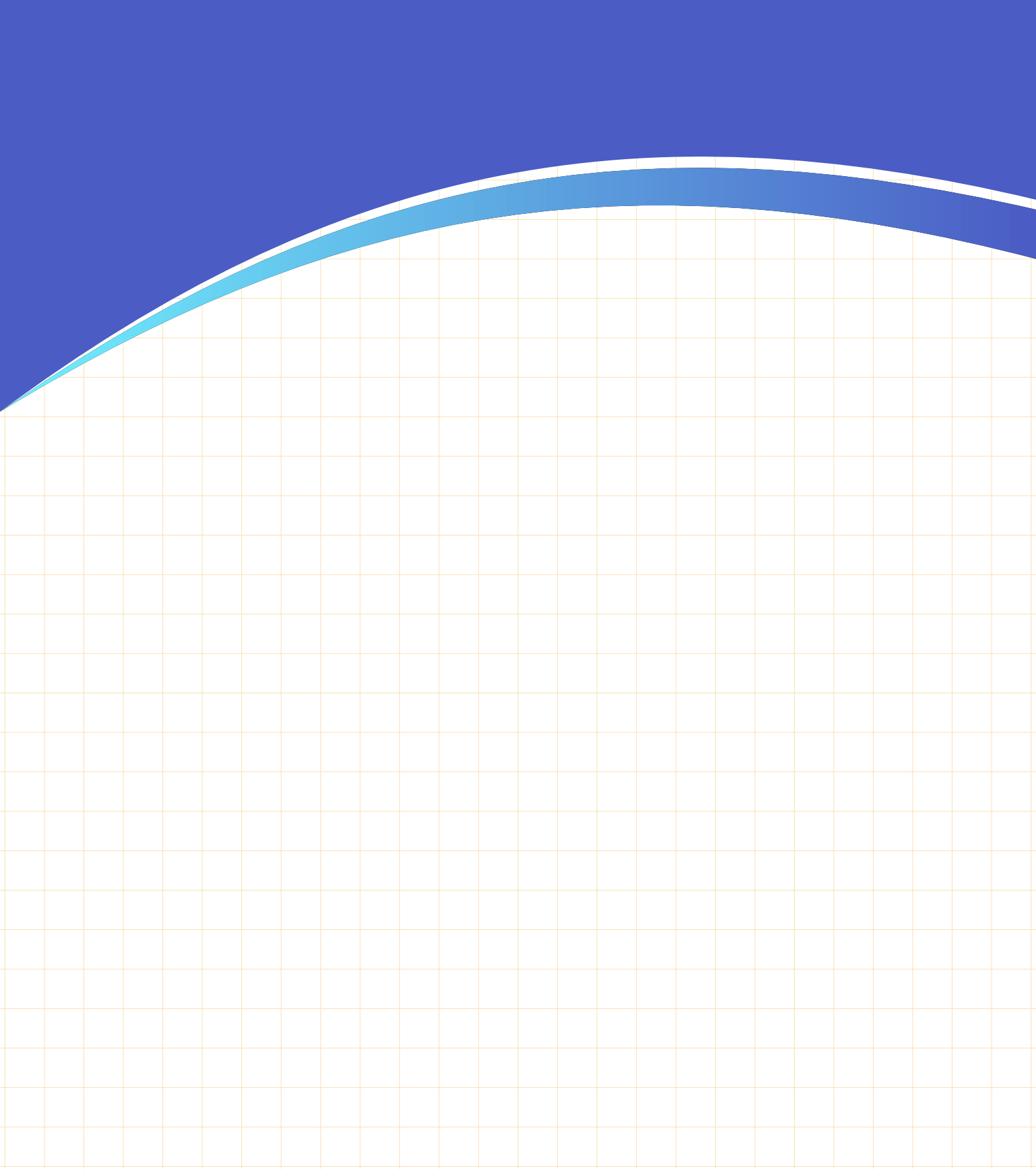
本书中可能用到下面的符号或缩写, 请对照理解.

符号及其描述

符号	描述	备注
$\mathbb{N}$	自然数集	全体自然数 (含 0) 组成的集合
$\mathbb{Z}$	整数集	全体整数组成的集合
$\mathbb{N}^*, \mathbb{N}_+, \mathbb{Z}_+$	正整数集	全体正整数组成的集合
$\in$	属于	$5 \in \mathbb{Z}$
$\forall$	任意, 所有	$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
$\exists$	存在	$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 = 0$
$:=, \triangleq$	记作	$x^2 - 2x + 3 := t$
$\implies$	推出	$a = b \implies a^2 = b^2$
$\iff$	等价于	$a = b \iff a - b = 0$
$\deg$	次数	$\deg f(x) = n, \deg(f) = n$
$y_{\max}$	函数 y 的最大值	$y_{\text{最大值}}$
$y_{\min}$	函数 y 的最小值	$y_{\text{最小值}}$
$p \mid n$	p 整除 n	p 是 n 的约数
$p^k \parallel n$	p^k 恰好整除 n	$p^k \mid n$ 且 $p^{k+1} \nmid n$
$\nu_p(n)$	n 的标准分解式中 p 的指数	使 $p^k \mid n$ 且 $p^{k+1} \nmid n$ 成立的 k
$\gcd(a, b)$	a, b 的最大公约数	$\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n)$
$\text{lcm}(a, b)$	a, b 的最小公倍数	$\text{lcm}(a_1, a_2, \dots, a_n)$
$a \equiv b \pmod{n}$	a, b 对模 n 同余	a, b 除以正整数 n 的余数相同
$\lfloor x \rfloor, [x]$	x 向下取整	$\lfloor x \rfloor \leq x$, 且 $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$
$\lceil x \rceil$	x 向上取整	$\lceil x \rceil \geq x$, 且 $\lceil x \rceil \in \mathbb{Z}$
A_n^k	排列数	从 $1 \sim n$ 中取 k 个的有序排列的种数
C_n^k	组合数	从 $1 \sim n$ 中取 k 个的无序组合的种数
$\sum_{i=1}^n x_i$	Σ, x, i, i 从 1 到 n	从 x_1 加到 x_n 的和
$\prod_{i=1}^n x_i$	Π, x, i, i 从 1 到 n	从 x_1 乘到 x_n 的积

缩写及其含义

缩写	全称	含义
iff	if and only if	当且仅当
s.t.	such that	使得
i.e.	id est	即
e.g.	exempli gratia	例如
QED	quod erat demonstrandum	证毕
WLOG	without loss of generality	不失一般性



图南智课分享
MATHEMATICS PROBLEM SOLVING ART
www.omaths.com