



香港数学奥林匹克



www.omaths.com

2021 第 23 届

题 1.1

现有一个方格表, 共有 n 行 18 列, 每个方格内装有 0 或 1 其中一个数, 这个方格表满足以下条件:

- (i) 任何两行都是不同的.
 - (ii) 每行都恰好有 6 个方格装有 1.
 - (iii) 对于任何三行, 都存在一列使得这列与三行的相交 (该三个方格) 全部装有 0.
- 那么 n 最大可能值是什么?

题 1.2

对于每个大于 1 的正整数 n , 设 $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ 是它的质因数连乘式, 则我们定义它的“记号”为 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k$. 是否存在 2020 个连续正整数, 使得它们当中恰好有 1812 个整数的记号小于 11?



题 1.3

设 $ABCD$ 是圆内接四边形, 其外接圆为 Γ , 且 $AB = AD$, 设 E 是线段 CD 上一点, 使得 $BC = DE$. 直线 AE 与 Γ 再次相交于 F , 弦 AC 和 BF 相交于 M , 并设 P 是 C 沿 M 反射后所得的点. 求证: PE 和 BF 互相平行.

题 1.4

设 a, b 和 c 为正实数, 满足 $abc = 1$. 求证:

$$\frac{1}{a^3 + 2b^2 + 2b + 4} + \frac{1}{b^3 + 2c^2 + 2c + 4} + \frac{1}{c^3 + 2a^2 + 2a + 4} \leq \frac{1}{3}.$$